דף נוסחאות במכניכיף

עדי מכנס

1 וקטורים

אורך של וקטור: $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$

מכפלה סקלרית: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |A| \cdot |B| \cdot \cos\theta$

מכפלה וקטורית: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$

$$(A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A||B| \sin\theta$$

מכפלה וקטורית של בסיסים:

$$\begin{cases} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} & \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} & \hat{\theta} \times \hat{z} = \hat{r} \\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} & \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta} \end{cases}$$

קואורדינטות פולריות:

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

מעבר בין הצגות:

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} & x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ \tan\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} & y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

2 קינמטיקה

גדלים בסיסים: $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

גודל/קואורדינטות	קרטזיות	פולריות
מיקום	$x\hat{x} + y\hat{y}$	$r\hat{r}$
מהירות	$\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$	$\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
תאוצה	$\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

המיקום של גוף A ביחס לגוף B: $\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$

המהירות: $\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

התאוצה: $\vec{a}_{A,B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$

(כאשר $\vec{r}_A$ המיקום "האמיתי" של A)

3 חוקי ניוטון

החוק השני של ניוטון (מערכת אינרציאלית): $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

החוק השני בגרסה המוכללת: $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$.

החוק השלישי של ניוטון: $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$.

כוחות נפוצים:

- משיכה: mg. כבידה אוניברסלית: $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
- חיכוך סטטי: $\mu_{s,\max} N \geq$.
- חיכוך קינטי: $\mu_k N$.
- קפיץ: $-k\Delta x$.

4 תנועה הרמונית

בתנועה מעגלית **קצובה**:

תדירות: $f = \frac{1}{T}$,$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

תאוצה: $a = \frac{v^2}{R}$.

5 תנע

הגדרה: $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i$

החוק השני של ניוטון למערכת: $\sum \vec{F}_{\text{exterior}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

מתקף: $\Delta\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

חוק שימור התנע: $\Delta\vec{p} = \vec{J}$. כשאין כוחות חיצוניים: $\Delta\vec{p} = \vec{0}$.

מיקום מרכז מסה: $\vec{x}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{x}_i}{\sum m_i}$, מהירות: $\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$, תאוצה: $\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$.

החוק השני של ניוטון למ"מ: $\sum \vec{F}_{\text{exterior}} = \sum m_i \cdot \vec{a}_{\text{cm}}$

והמוכלל: $\sum \vec{p} = \sum m_i \cdot \vec{v}_{\text{cm}}$

התנגשות:

- פלסטית: $\sum m_i \vec{v}_i = (\sum m_i)\vec{u}$
- אלסטית: שימור אנרגיה.

6 עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח: $W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int F_x \mathrm{d}x + \int F_y \mathrm{d}y$

נוסחה כללית: אם $\gamma : [a,b] \to C$ מסילה, אזי:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t$$

אנרגיה קינטית: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

כוח משמר: $\vec{F} = \vec{0}$. $\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. בדו מימד: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$.

תנאי שקול: קיים פוטנציאל U כך ש $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.

(כאשר $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$)

תנאי שקול: העבודה של הכוח לא תלויה במסלול;
במסלול סגור העבודה היא 0

משפט עבודה אנרגיה: $\sum W = \Delta E_k$.

גרסה שקולה: $\sum W_{\text{not conservative}} = \Delta E$.

(כאשר $\Delta E = E_k + \sum U_i$)

כוח	פוטנציאל
mgh	$-mg\hat{y}$
$\frac{1}{2}kx^2$	$-kx\hat{r}$
$-G\frac{m_1m_2}{r}$	$-G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{r}$
$-f(r)\hat{r}$	$f'(r)\hat{r}$

תנועה הרמונית יחסית לנק' שיווי משקל יציבה (מינ'): $\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$.

7 תנע זוויתי

הגדרה: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$.

טורק: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

חוק שימור התנ"ז: $\sum \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$.

8 כוח מרכזי

הגדרה: $\sum \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$.

תנ"ז בכוח מרכזי: $L = mr^2\dot{\theta}$.

אנרגיה בכוח מרכזי: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$,
כאשר $U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$.

9 בעיית קפלר

משוואת אליפסה קנונית: $\frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$, $r(\theta) = \frac{r_0}{e\cos\theta+1}$,
כאשר $a^2 = \frac{r_0}{1-e^2}, b^2 = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}$.

בבעיית קפלר: $r_0 = \frac{L^2}{MGm^2}, e = \frac{AL^2}{MGm^2}$.

אנרגיה	אקצנטריות	המסלול
$-\frac{m^3M^2G^2}{2L^2}$	0	מעגל
$E < 0$	$0 < e < 1$	אליפסה
$E = 0$	$e = 1$	פרבולה
$E > 0$	$e > 1$	היפרבולה

חוקי קפלר:

- השני: $\frac{A}{T} = \frac{L}{2m}$. גרסה שקולה: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m} = \text{const}$.
- השלישי: $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$.

10 גוף קשיח

מומנט התמד: $I = \sum m_i r_\perp^2 = \int r^2 \mathrm{d}m$.

משפט הציר המקביל: $I = I_{\text{cm}} + Md^2$

גוף	ציר סיבוב	מומנט התמד
דיסקה ברדיוס R	אמצע הדיסקה	$\frac{1}{2}MR^2$
גליל ברדיוס R	אמצע הגליל, מקביל לציר הגובה	$\frac{1}{2}MR^2$
מוט באורך ℓ	אמצע המוט	$\frac{1}{12}M\ell^2$
כדור (מלא) ברדיוס R	אמצע הכדור	$\frac{2}{5}MR^2$
ספירה (קליפה) ברדיוס R	אמצע הספרה	$\frac{2}{3}MR^2$
תיבה בגודל $a \times b$	אמצע התיבה, מקביל לציר הגובה	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$

*צפיפות מסה אחידה

תנועה סביב ציר קבוע:

- החוק השני של ניוטון: $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$.
- תנע: $L_z = I\omega$.
- אנרגיה: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$.

תנועה מורכבת:

- תנ"ז: $\vec{L} = I_{\text{cm}}\dot{\theta}\hat{z} + M\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{v}_{\text{cm}}$.
- אנרגיה: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$.

גלגול ללא החלקה: $|v| = |\omega|R$.

11 כוחות מדומים

כוח מדומה בתנועה קווית: $-m\vec{a}_{\text{S,IS}}$, כאשר $\vec{a}$ היא תאוצת המערכת הלא אינרציאלית S יחסית למערכת אינרציאלית IS.
(כיוונו כנגד כיוון התנועה של הגוף במערכת האינרציאלית).

נגזרת בזמן של וקטור $\vec{B}$ המסתובב סביב ציר סיבוב $\vec{\omega}$: $\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{B}$

נגזרת של וקטור מסתובב יחסית למערכת אינרציאלית:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{in}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{C}$$

ובפרט:

$$\vec{v}_{\text{in}} = \vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

כאשר $\vec{\omega}$ ציר הסיבוב של המערכת המסתובבת.

כוחות מדומים בתנועה מעגלית:

$$\vec{F}_{\text{cent}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}}$$

כאשר: $\vec{\omega}$ ציר הסיבוב, $\vec{r}$ מיקום החלקיק, $\vec{v}_{\text{rot}}$ הוא מהירות החלקיק במערכת הלא אינרציאלית.

12 מתמטיקה

מד"ר:

- $\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(y)\mathrm{d}y + C \Leftarrow f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y$
- $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Leftarrow \dot{x} = v_0 + at \Leftarrow \ddot{x} = a$.
- $x = Ae^{at} + Be^{-at} \Leftarrow \ddot{x} = a^2x$.

- $\ddot{x} = -\omega^2 x \Leftarrow x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ או $x = A\cos(\omega t + \phi)$.
- $\dot{x} = ax \Leftarrow x = e^{at}$.

טיילור: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots$

*שימו לב ש $\log = \ln$.

פיסיקה 1 - דף נוסחאות

זהויות מתמטיות

- פונקצית אקספוננט: $e^A\, e^B = e^{A+B}$, $e^{-A} = 1/e^A$
- פונקצית לוגרתם: $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$, $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$
- נגזרות: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$, $\frac{d}{dx}e^{a\,x} = a\, e^{a\,x}$, $\frac{d}{dx}x^n = n\, x^{n-1}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+a}\right) = -\frac{1}{(x+a)^2}$, $\frac{d}{dx}\log(x+a) = \frac{1}{(x+a)}$
- כללי גזירה: $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg}\,\frac{dg(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$
- הגדרה של נגזרת: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $\Leftarrow$ $f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\pi \pm x) = \mp\sin x\ ;\ \cos(\pi \pm x) = -\cos x$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x\ \ ;\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin(-x) = -\sin x\ \ ;\ \cos(-x) = \cos x$$