מודלים – פעולות, רגולרי vs אי-רגולרי, סגירות

פעולות על שפות:

היפוך-

בהינתן שפה L נגדיר את שפת ההיפוך *R(L)*, כשפת כל המילים *R(w)* כאשר $w \in L$.
כלומר, שפת ההיפוך של שפה L היא כל המילים ב- L בהיפוכן.

דגשים על פעולת ההיפוך:

- $R(L) = L$ כאשר עבור כל מילה $w \in L$ מתקיים שגם $R(w) \in L$.
- *L = {w·R(w)| w hold some conditions}* היא שפה שבה כל מילה היא פלינדרום.
  אם יש דרישה על הגודל של w אז הדרישה מוכפלת עבור המילה המשורשת.

משלים-

בהינתן שפה L מעל הא"ב $\sum$ נגדיר את שפת המשלים $\overline{L}$, כשפת כל המילים מעל $\sum$ שאינן ב-L .

דגשים על פעולת משלים:

- תמיד מתקיים $L \cup \overline{L} = \sum^*$, $L \cap \overline{L} = \emptyset$
- תמיד מתקיים $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

שרשור-

בהינתן שפות L_1, L_2 נגדיר את שפת השרשור $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \,|w_1 \in L_1 \cap\ w_2 \in L_2\}$.
כלומר, שפת השרשור $L_1 \cdot L_2$ היא שפת כל המילים שניתן לבנות ממילה ב-L_1 ושרשור מילה ב-L_2.

דגשים על פעולת שרשור:

- כאשר נדרשים לכתוב את שפת השרשור של שתי שפות הכתובות בצורה של תבנית-כללית, יש להקפיד לא להשתמש באותם אינדקסים שיוצרים תלות שלא הייתה קיימת בשפות המקוריות.
  לדוגמא:
  $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$, $L_2 = \{a^n b^m c^n | n, m > 0\}$ ← $L_1 \cdot L_2 = \{a^n b^n a^k b^m c^k | n \geq 0, k, m > 0\}$
- שרשור של שתי שפות עם א"ב שונה נותן שפה עם א"ב האיחוד של הא"ב-ים.
  לדוגמא:
  שפה L_1 מעל א"ב {a,b} ושפה L_2 מעל א"ב {b,c} ← הא"ב של $L_1 \cdot L_2$ הוא {a,b,c}
- מילה שייכת ל- $L_1 \cdot L_2$ אם ניתן לחלקה למילים w_1, w_2 כך ש- $w_1 \in L_1 \cap\ w_2 \in L_2$.

חזקה-

בהינתן שפה L נגדיר את שפת החזקה L^n, כשפת כל המילים המתקבלות משרשור L לעצמה n פעמים.

דגשים על פעולת חזקה:

- אם מתקיים $L^2 = L$ אז מתקיים $L^n = L$.
- אם לא מתקיים $\varepsilon \in L$ *אז* $L^n \neq L$ (אם כן מתקיים $\varepsilon \in L$ *עדיין לא בהכרח* $L^n = L$)
- אם מתקיים $\varepsilon \in L$ אז בהכרח מתקיים $L \subseteq L^n$ (מפני שעבור כל מילה $w \in L$ ניתן לשרשר *n-1* פעמים את ε עם *w*. לכן $w \in L^n$).

kilshazer@gmail.com מאת: קלי שז

<u>איחוד-</u>

בהינתן שפות L_1, L_2 נגדיר את שפת האיחוד $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1$ או $w \in L_2\}$.
כלומר מילה שייכת לשפת האיחוד $L_1 \cup L_2$ אם היא שייכת ל-L_1 או ל-L_2 (או לשתיהן).

דגשים על פעולת איחוד:

- כדי להראות שמילה לא ב-$L_1 \cup L_2$ יש להראות שלא שייכת ל-L_1 ולא שייכת ל-L_2.
- $L_2 \cup L_1 = L_1 \cup L_2$ (הסדר לא חשוב)
- דגשים נוספים – ראו "איחוד קבוצות" בסיכום "קבוצות, פעולות, ופעולות עליהן".

<u>חיתוך-</u>

בהינתן שפות L_1, L_2 נגדיר את שפת החיתוך $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1$ וגם $w \in L_2\}$.
כלומר מילה שייכת לשפת החיתוך $L_1 \cap L_2$ אם היא שייכת ל-L_1 וגם ל-L_2.

דגשים על פעולת חיתוך:

- כדי להראות שמילה לא ב-$L_1 \cap L_2$ יש להראות שלא שייכת ל-L_1 או לא שייכת ל-L_2.
- $L_2 \cap L_1 = L_1 \cap L_2$ (הסדר לא חשוב)
- דגשים נוספים – ראו "חיתוך קבוצות" בסיכום "קבוצות, פעולות, ופעולות עליהן".

<u>הכלה-</u>
נגדיר את יחס ההכלה $L_1 \subseteq L_2$ כאשר מתקיים שכל מילה $w \in L_1$ מקיימת $w \in L_2$.

דגשים על יחס ההכלה:

- כדי להראות שלא מתקיים $L_1 \subseteq L_2$ (סימון: $L_1 \not\subseteq L_2$) יש להראות שקיימת מילה $w \in L_1$ שאינה מקיימת $w \in L_2$.
- אם מתקיים $L_1 \subseteq L_2$ ומתקיים גם $L_2 \subseteq L_1$ אז $L_1 = L_2$ (הכלה דו-כיוונית).

kilshazar@gmail.com

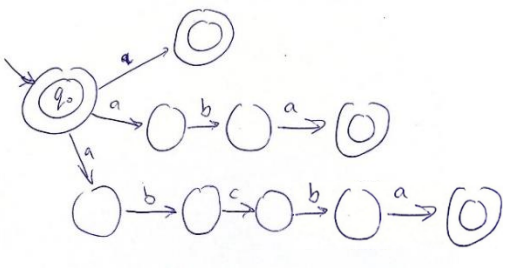
שפות רגולריות:

משפט!
אם ניתן לתאר שפה L על-ידי אוטומט סופי אז L רגולרית.

איך משתמשים במשפט?
כשיש להוכיח ששפה היא רגולרית נתארה על ידי אוטומט סופי. לפי המשפט אם הצלחנו לתאר את השפה על-ידי אוטומט סופי אז היא רגולרית.
בכל פעם שרוצים להוכיח רגולריות יש לכתוב: "נוכיח שהשפה רגולרית בכך שנתארה על-ידי אוטומט סופי".

דגשים על שפה רגולרית:

- כל שפה סופית (שפה שכמות המילים בה היא סופית) היא בהכרח רגולרית.
ניתן עבור שפה כזו לתארה עם אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי (לא מלא) שבו קיים מסלול מקבל עבור כל מילה בשפה.



לדוגמא: השפה $L = \{\varepsilon, a, aba\ , abcba\}$ היא סופית כי יש בה כמות סופית (4) מילים. נתארה על ידי אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי ובו 4 מסלולים (אחד באורך 0 עבור המילה הריקה) מקבלים עבור כל מילה בשפה.

kilshazar@gmail.com

שפות לא רגולריות:

עדיין לא למדנו איך להוכיח ששפה היא לא רגולרית!!! כאשר נלמד יש להוסיף לחלק זה סיכום להוכחת אי-רגולריות!!!

אינטואיציה (לא משפט): שפה היא לא רגולרית כשלא ניתן לתארה על ידי אוטומט סופי.
מתי לא ניתן לתאר שפה על ידי אוטומט סופי?
כאשר יש תלות בין חלקי מילה, והתלות אינה מוגבלת ב"גודל שלה" (הסבר מדויק יותר יגיע מיד).

ב**שאלות שבהן מתבקשים <u>להוכיח</u> ששפה אינה רגולרית**:
לאחר שנלמד זאת נשלים את מבנה ההוכחה פה.

בשאלות בהן מתבקשים <u>להסביר</u> מדוע שפה אינה רגולרית:

<u>נספק הסבר לפי התבנית הבאה:</u>

"יש **תלות** בין _____. **בניסיון לתאר את השפה על-ידי אוטומט סופי** צריך מצב שזוכר את _____, כדי לדעת אם המשך המילה היא בשפה. מכיוון ו-_____ **אינה מוגבלת**, יש להחזיק באוטומט **אינסוף מצבים שזוכרים** את _____. האוטומט אינו סופי! ולא ניתן לתאר את השפה על ידי אוטומט סופי ולכן השפה אינה רגולרית".

נבהיר על ידי דוגמאות:

- $L = \{a^n b^n | n > 0\}$.
  נזהה שיש תלות בין אורך הרצף של ה-a-ים לאורך הרצף של ה-b-ים במילה.
  הסבר עם שימוש בתבנית:
  יש תלות בין <u>אורך הרצף של ה-a-ים לאורך הרצף של ה-b-ים</u>. בניסיון לתאר את השפה על-ידי אוטומט סופי צריך מצב שזוכר את <u>אורך רצף ה-a-ים</u>, כדי לדעת אם המשך המילה היא בשפה. מכיוון ו-<u> אורך רצף ה-a-ים</u> אינו מוגבל, יש להחזיק באוטומט אינסוף מצבים שזוכרים את <u>אורך רצף ה-a-ים</u>. האוטומט אינו סופי! ולא ניתן לתאר את השפה על ידי אוטומט סופי ולכן השפה אינה רגולרית.

- L = {כל המילים מעל {a,b} שבהן כמות ה-a-ים גדולה מכמות ה-b-ים}
  נזהה שיש תלות בין כמות ה-a-ים לכמות ה-b-ים במילה.
  הסבר עם שימוש בתבנית:
  יש תלות בין <u>כמות ה-a-ים לכמות ה-b-ים</u>. בניסיון לתאר את השפה על-ידי אוטומט סופי צריך מצב שזוכר את <u>ההפרש בין כמות ה-a-ים לכמות ה-b-ים</u>, כדי לדעת אם המשך המילה היא בשפה. מכיוון ו-<u> גודל ההפרש</u> אינו מוגבל, יש להחזיק באוטומט אינסוף מצבים שזוכרים את <u>ההפרש בין כמות ה-a-ים לכמות ה-b-ים</u>. האוטומט אינו סופי! ולא ניתן לתאר את השפה על ידי אוטומט סופי ולכן השפה אינה רגולרית.

שימו לב: תבנית ההסבר אינה הוכחה!

kishazar@gmail.com

סגירות:

משפחת השפות הרגולריות סגורות תחת הפעולות: היפוך, משלים, חזקה, שרשור, חיתוך ואיחוד.
לפניכם המשפטים המתאימים:

<u>משפט:</u> אם שפה L רגולרית אז גם $R(L)$ היא שפה רגולרית.
<u>משפט:</u> אם שפה L רגולרית אז גם $\overline{L}$ היא שפה רגולרית.
<u>משפט:</u> אם שפה L רגולרית אז גם L^n היא שפה רגולרית.
<u>משפט:</u> אם שפות L_1, L_2 רגולריות אז גם $L_1 \cdot L_2$ וגם $L_2 \cdot L_1$ היא שפה רגולרית.
<u>משפט:</u> אם שפות L_1, L_2 רגולריות אז גם $L_1 \cap L_2$ היא שפה רגולרית.
<u>משפט:</u> אם שפות L_1, L_2 רגולריות אז גם $L_1 \cup L_2$ היא שפה רגולרית.

שימו לב: אין משפט על יחס ההכלה.

בעזרת המשפטים הנ"ל ניתן להוכיח ששפה היא רגולרית אם ניתן להרכיב אותה מתתי-שפות רגולריות ומהפעולות הסגורות (היפוך, משלים, חזקה, שרשור, חיתוך ואיחוד).

מבנה להוכחה ששפה L היא רגולרית על ידי שימוש בתכונת הסגירות:

1. נזהה את תתי השפות מהן L מורכבת ונגדיר במדויק כל אחת מתתי-השפות שזיהינו.
2. נביע את L בעזרת תתי השפות והפעולות הסגורות.
3. נוכיח כי כל אחת מתתי השפות היא רגולרית על-ידי תאורן עם אטומט סופי.
4. מאחר וכל תת שפה היא רגולרית ומאחר ובשלב 2 תיארנו את L בעזרתן עם פעולות סגורות, ניתן להשתמש במשפטים ולהסביר ש-L היא שפה רגולרית (ראו דוגמא).

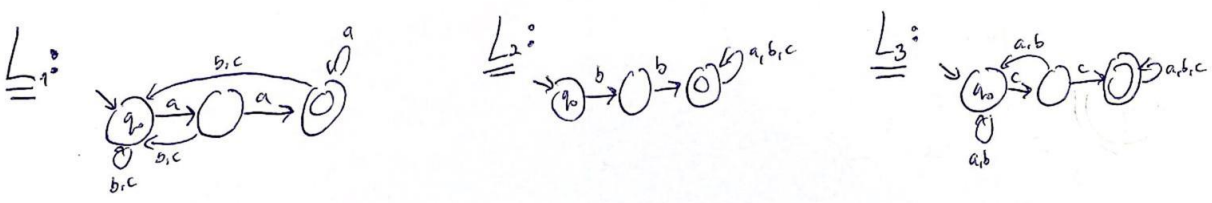
<u>דוגמא</u>:

נתונה השפה {כל המילים מעל {a,b,c} שמכילות רצף aabb ואינן מכילות רצף cc} = L.
הוכיחו שהשפה L רגולרית על ידי שימוש בתכונת הסגירות:

1. תתי השפות:
{ כל המילים מעל {a,b,c} המסתיימות ב-*aa* } = L_1
{ כל המילים מעל {a,b,c} המתחילות ב-bb } = L_2
{ כל המילים מעל {a,b,c} המכילות רצף cc } = L_3

2. $L = (L_1 \cdot L_2) \cap \overline{L_3}$

3. נוכיח שתתי השפות רגולריות על ידי תיאורן עם אוטומט סופי:



4. הוכח ש-L_3 רגולרית, ומשפחת השפות הרגולריות סגורה תחת פעולת משלים ולכן $\overline{L_3}$ רגולרית. הוכח ש- L_1, L_2 רגולריות, ומשפחת השפות הרגולריות סגורה תחת פעולת שרשור ולכן $(L_1 \cdot L_2)$ רגולרית. הוכח ש- $\overline{L_3}$, $(L_1 \cdot L_2)$ רגולריותו, משפחת השפות הרגולריות סגורה תחת פעולת חיתוך ולכן $\overline{L_3} \cap (L_1 \cdot L_2)$ רגולרית. זוהי למעשה L ולכן היא רגולרית.

ishazar@gmail.com