סיכום מכניכיף

עדי מכנס

22 בינואר 2026

הסיכום מבוסס על הרצאותיו של ד"ר מיכאל רבינוביץ' והתרגולים של נחלה אסתר ידיד לאודיסאה, התשפ"ו.
כמו כן, הסיכום שלי מבוסס על הסיכום המעולה של אסף פאר, וכן הספר המעולה:
Kleppner, D. & Kolenkow, R. "An Introduction to Mechanics" (Cambridge), second edition.
להצעות, בעיות, בקשות, טעויות מוזמנים לדבר איתי. אני לא נושך!
– מכנס ☺

תוכן העניינים

1 וקטורים **2**
1.1 מבוא והגדרה גאומטרית . . . 2
1.2 אריתמטיקת וקטורים . . . 3
1.3 וקטורים במערכת צירים (ייצוג אלגברי של וקטורים) . . . 6

2 קינמנטיקה **10**
2.1 מבוא והגדרות בסיסיות . . . 10
2.2 משוואות תנועה בסיסיות . . . 13
2.3 קואורדינטות פולריות . . . 13

3 מבוא לחוקי ניוטון **16**
3.1 חוקי ניוטון . . . 16
3.1.1 החוק הראשון של ניוטון . . . 16
3.1.2 החוק השני של ניוטון . . . 17
3.1.3 החוק השלישי של ניוטון . . . 17
3.2 כוחות בסיסיים . . . 17
3.3 דוגמאות בסיסיות . . . 18
3.4 פתירת בעיות בעזרת אילוצים . . . 22
3.5 בעיות בקואורדינטות פולריות . . . 26

4 כוחות ומשוואות תנועה **33**
4.1 גרוויטציה . . . 33
4.2 מתיחות מתקדמת . . . 37
4.3 כוח החיכוך . . . 41
4.3.1 כוח חיכוך סטטי . . . 41
4.3.2 כוח חיכוך קינטי . . . 41
4.3.3 פתרון בעיות עם חיכוך . . . 42
4.4 כוח גרר . . . 45
4.5 תנועה הרמונית . . . 47
4.5.1 כוח קפיץ . . . 47
4.5.2 עוד בעיות . . . 51

5 תנע **52**
5.1 הגדרת התנע . . . 52
5.2 מרכז המסה . . . 57
5.3 מערכות עם מסה משתנה . . . 63

6 עבודה ואנרגיה **66**
6.1 עבודה ומשפט עבודה אנרגיה . . . 66
6.2 כוחות משמרים . . . 70
6.3 דיאגרמת אנרגיה . . . 76
6.4 התנגשויות ומערכת מרכז המסה . . . 78

7 תנע זוויתי **78**
7.1 מבוא ואינטואיציה . . . 78
7.2 כוח מרכזי . . . 81
7.3 בעיית קפלר . . . 85

8 גוף קשיח **90**
8.1 מומנט התמד . . . 90
8.2 גלגול ללא החלקה . . . 95
8.3 תנועה מורכבת . . . 99

9 מערכות יחוס **103**
9.1 מערכות אינרציאליות ולא אינרציאליות . . . 103
9.2 מערכות מסתובבות . . . 106

א׳ יחידות מידה **114**
א׳.1 אריתמטיקה של יחידות מידה . . . 115
א׳.2 המרה בין יחידות . . . 115

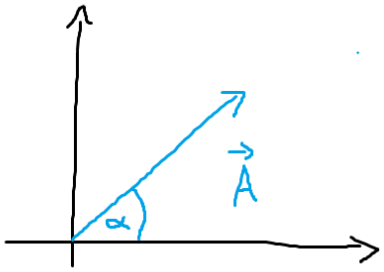
1 וקטורים

1.1 מבוא והגדרה גאומטרית

בפיזיקה יש חלוקה בין שני גדלים, סקלרים ווקטורים.

הגדרה 1.1. סקלר הוא גודל פיזיקלי בעל גודל בלבד (מספר).

הגדרה 1.2. וקטור הוא גודל פיזיקלי בעל גודל וכיוון. לרוב נתייחס לוקטורים בפיזיקה בעזרת חצים.



איור 1.1: הגדרה של וקטור כגודל בעל גודל וכיוון (חץ)

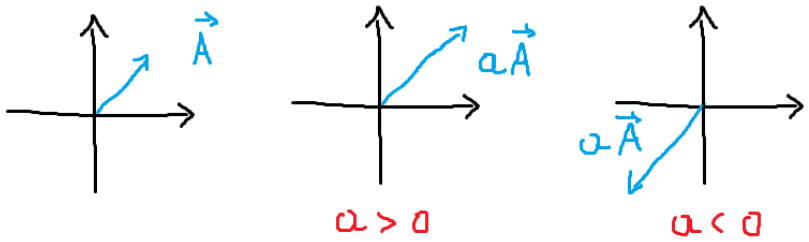
שימו לב, הכיוון של הוקטור נקבע לפי הצירים, שנתונים לבחירתנו.

דוגמה 1.3. גדלים סקלריים למשל: זמן, טמפ׳, מסה.
גדלים וקטוריים למשל: מהירות, כוח, תאוצה, תנע.

סימון 1.4. וקטור מסמנים עם חץ, למשל הוקטור $\vec{A}$. גודל של וקטור מסמנים ב A (בלי חץ) או $|A|$.

1.2 אריתמטיקת וקטורים

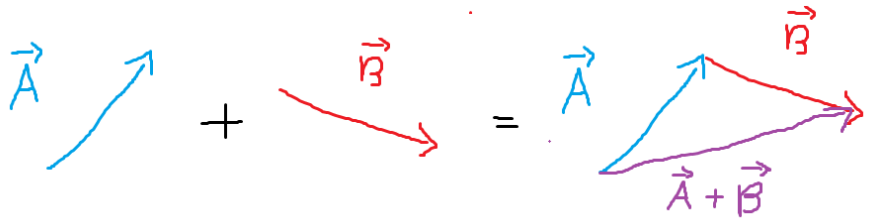
הגדרה 1.5. כפל של וקטור $\vec{A}$ בסקלר a מוגדר להיות וקטור שגודלו הוא $a\,|A|$ וכיוונו זהה אם $a > 0$ והפוך אם $a < 0$.



איור 1.2: המחשה של כפל וקטור בסקלר. שימו לב שכפל בסקלר שלילי משנה את כיוון הווקטור.

מכל וקטור ניתן להגדיר וקטור יחידה שגודלו הוא 1. זאת ע"י $A \mapsto \frac{\vec{A}}{|A|}$. לרוב קוראים לתהליך זה נרמול.

הגדרה 1.6. סכום של וקטורים $\vec{A}, \vec{B}$ מוגדר להיות ע"י כלל המשולש:
מעתיקים את הזנב של $\vec{B}$ לראש הוקטור $\vec{A}$, הצלע השלישית המתקבלת היא $\vec{A} + \vec{B}$.

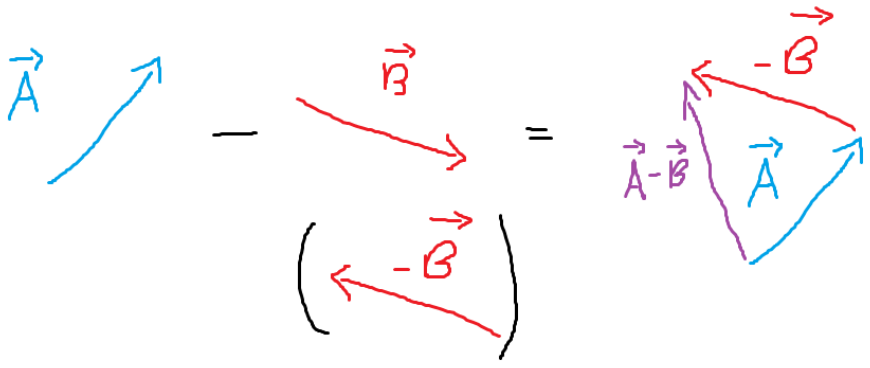


איור 1.3: המחשה של כלל המשולש לחיבור וקטורים

הגדרה 1.7. חיסור של וקטורים $\vec{A}, \vec{B}$ מוגדר להיות ע"י:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

כלומר לחבר את הנגדי של B (כלומר $-1 \cdot \vec{B}$).



איור 1.4: המחשה של כלל המשולש לחיסור וקטורים (חיבור הנגדי)

עובדה 1.8. זהויות אלגבריות:

$$c\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=c\vec{A}+c\vec{B}$$

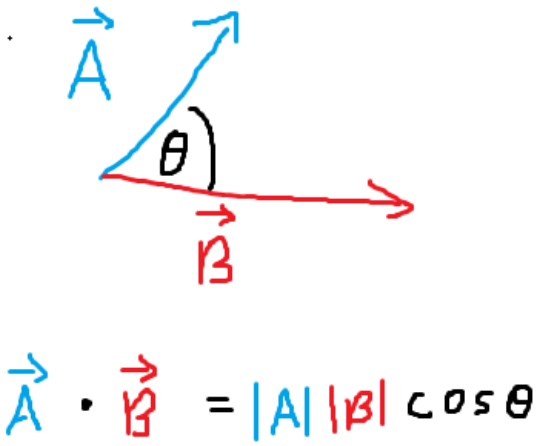
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

(למעשה אלה חוקי הפילוג והחילוף).

הגדרה 1.9. מכפלה סקלרית (או באנגלית dot product) היא פונקציה שמקבלת שני וקטורים (נסמנם $\vec{A},\vec{B}$) ומחזירה סקלר.

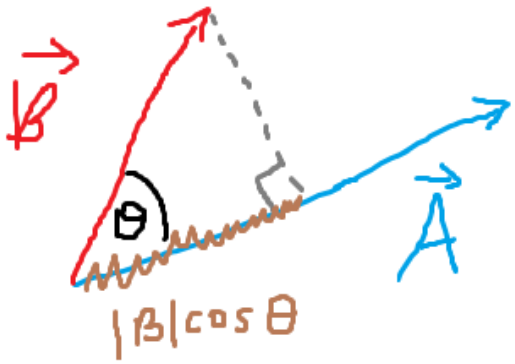
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A|\cdot|B|\cdot\cos\left(\theta\right)$$

כאשר θ היא הזווית הקטנה בין שני הוקטורים.



איור 1.5: המחשה של המכפלה הסקלרית. θ היא הזווית הקטנה שבין שני הווקטורים

המשמעות הגאומטרית של המכפלה הסקלרית היא הכפל של האורך של ההיטל של הוקטור $\vec{A}$ על האורך של הוקטור $\vec{B}$.



איור 1.6: אורך ההיטל (חום) הוא $|B|\cos\left(\theta\right)$ משיקולים טריגונומטריים. לכן אורך ההיטל כפול האורך של $\vec{A}$ היא המכפלה הסקלרית.

מסקנה 1.10. לכל וקטור $\vec{A}$ מתקיים כי:

$$|A|^2=A\cdot A$$

הוכחה. יהי וקטור $\vec{A}$. אכן:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=|A|\cdot|A|\cdot\cos\left(\theta\right)=|A|^2\cdot1=|A|$$

כיוון שהזווית בין $\vec{A}$ ל $\vec{A}$ היא 0. ■

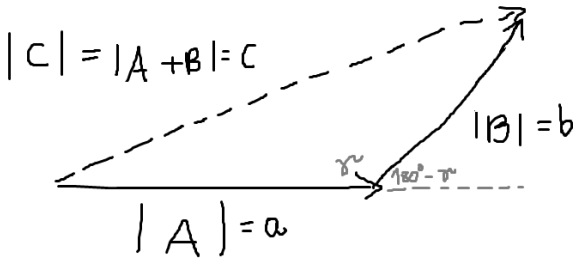
משפט 1.11. משפט הקוסינוסים: בכל משולש מתקיים כי $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (כאשר γ הזווית שממול c).

הוכחה. יהיו וקטורים $\vec{A}, \vec{B}$. נסכום אותם ונקבל משולש שאורך הצלע השלישית היא $\vec{A} + \vec{B}$, נסמנה ב $\vec{C}$. לכן:

$$|C|^2 = \vec{C}\cdot\vec{C} = \left(\vec{A}+\vec{B}\right)\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} = |A|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + |B|^2$$

כעת נשים לב כי המכפלה הסקלרית בין $\vec{A}$ ל $\vec{B}$ תתן את הזווית שמחוץ למשולש, ולכן בכדי להביע בעזרת הזווית שבתוך המשולש מתקיים כי:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |A|\cdot|B|\cdot\cos\left(180^\circ - \gamma\right)$$



איור 1.7: המחשה של הוכחת משפט הקוסינוסים בעזרת וקטורים

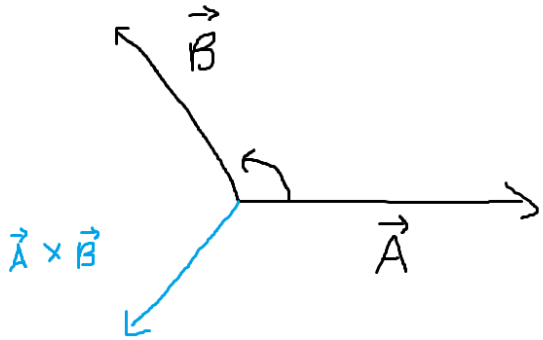
והרי $\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = -\cos\left(\gamma\right)$ ולכן נקבל:

$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2\,|A|\,|B|\cos\left(\gamma\right)$$

אם נסמן $|A| = a, |B| = b, |C| = c$ נקבל כמבוקש. ■

הגדרה 1.12. מכפלה וקטורית (באנגלית cross product) בין שני וקטורים $\vec{A}, \vec{B}$ מוגדרת להיות הוקטור הבא:

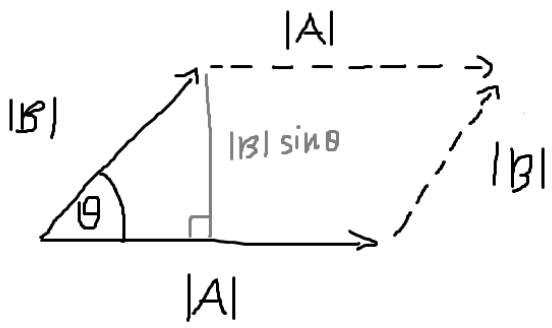
- גודלו: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = |A|\cdot|B|\cdot\sin\theta$ (כאשר θ הזווית בין שני הוקטורים)
- כיוונו: בעזרת כלל ימין: אצבעות יד ימין מסובבות את A לכיוון B ואז האגודל מצביע לכיוון של $\vec{A}\times\vec{B}$ (כלומר ניצב לווקטורים)



איור 1.8: כלל יד ימין: קחו את יד ימין ומתחו את האגודל. כעת, מקמו את ידכם מול המסך (שיהיה ניצב לוקטור $\vec{A}$). כעת, הזיזו את ארבעת האצבעות לכיוון וקטור $\vec{B}$ (בכיוון החץ). אתם אמורים לקבל שהאגודל פונה בכיוון וקטור המכפלה הווקטורית.

טענה 1.13. גודל המכפלה הוקטורית של $\vec{A}, \vec{B}$ הוא שטח המקבילית הנוצרת ביניהם.

הוכחה. שטח מקבילית הוא מכפלת הגובה בצלע הסמוכה. אך אפשר להביע בעזרת טריגונומטריה את הגובה ובכך לקבל שאורך הגובה הוא הצלע הנוספת של המקבילית כפול סינוס הזווית שבינהם, ובכך לקבל את גודל המכפלה הוקטורית, לפי ההגדרה.



איור 1.9 : המחשה של הוכחת הנוסחה הטריגונומטרית של שטח מקבילית

■

הגדרה 1.14. מערכת צירים ימנית היא שלישיית וקטורים $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, כך ש :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$$

עובדה 1.15. הבדלים בין מכפלה סקלרית לוקטורית

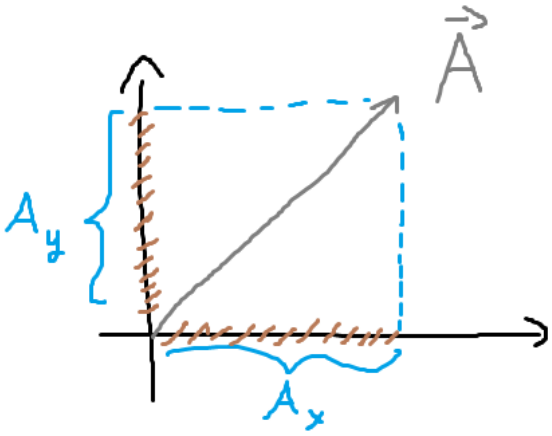
סקלרית	וקטורית
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$	$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
$\vec{A} \cdot \vec{A} = \|A\|^2$	$\vec{A} \times \vec{A} = 0$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \iff \vec{A} \perp \vec{B}$	$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \iff \vec{A} \parallel \vec{B}$

טבלה 1 : השוואה בין תכונות המכפלה הסקלרית למכפלה הווקטורית

הקוראים מוזמנים להוכיח תכונות אלה כתרגיל.

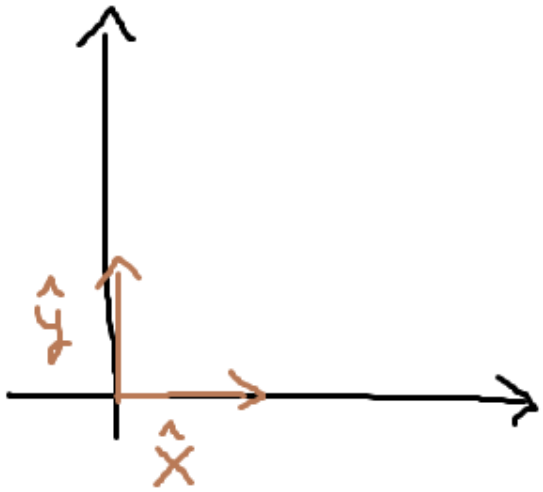
1.3 וקטורים במערכת צירים (ייצוג אלגברי של וקטורים)

אם ניקח את הווקטור $\vec{A}$ ונשים אותו במערכת צירים קרטזית, ונשים את זנבו בראשית, נקבל היטלים של הוקטור A על הצירים. נסמנם A_x, A_y. לסקלרים הללו נקרא רכיבי הוקטור.



איור 1.10 : רכיבי הווקטור הם אורכי ההיטלים על הצירים

הגדרה 1.16. וקטורי יחידה אלו וקטורים שגודלם אחד וכיוונים ככיוון הצירים. לרוב נסמנם $\hat{x}, \hat{y}$.



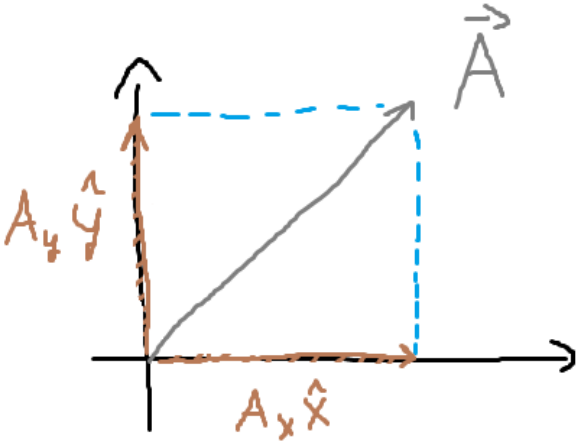
איור 1.11: וקטורי יחידה

מסקנה 1.17. אפשר להגדיר את ההיטל של A על הצירים ע"י:

$$A_x\hat{x}, A_y\hat{y}$$

ולכן:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$

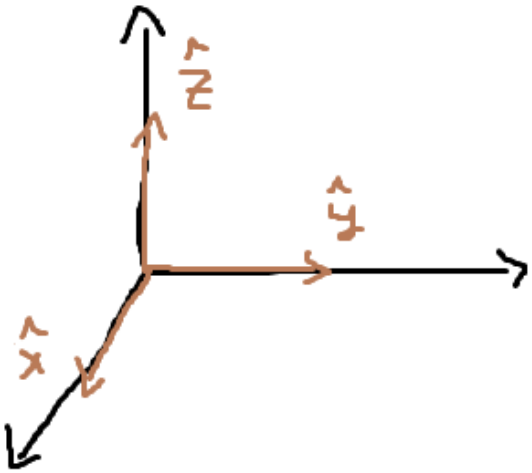


איור 1.12: הצורה האלגברית של וקטור – ייצוג ע"י הרכיבים

סימון 1.18. לפעמים נסמן: $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} = (A_x, A_y)$.

כעת נעבור לדבר על מערכת צירים תלת מימדית:

הגדרה 1.19. מערכת צירים תלת מימדית היא מערכת צירים ימנית x, y, z כאשר x, y, z מאונכים וגודל כל הוקטורים יחידה. לרוב נסמנם $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.



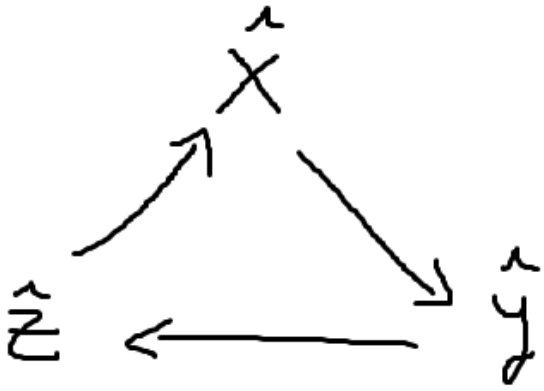
איור 1.13: מערכת צירים תלת מימדית. שימו לב כי היא גם ימנית!

עובדה 1.20. במערכת צירים תלת מימדית מתקיים:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

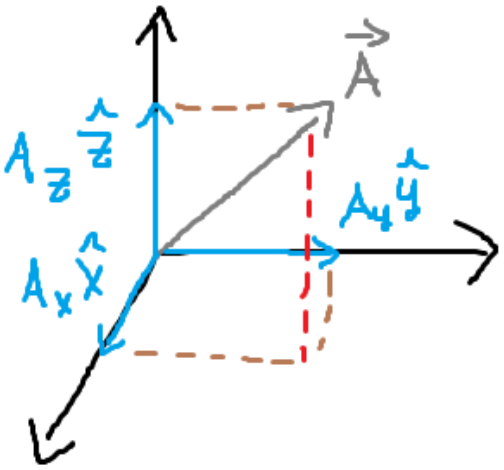
$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$



איור 1.14: טיפ לזכירת המכפלות לעיל. אם הולכים אחרי החצים, מקבלים את הווקטור השלישי.

וכמו כן:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = (A_x, A_y, A_z)$$



איור 1.15: פירוק לרכיבים של וקטור במערכת צירים תלת מימדית

טענה 1.21. יהיו $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$. אזי:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

הוכחה. נשים לב כי:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \cdot (B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

הרוב מצטמצם (כי וקטורי היחידה מאונכים) ונקבל:

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

■

טענה 1.22. יהיו $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$. אזי:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_x - A_zB_y)\,\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{z}$$

הוכחה. נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \times \left(\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}\right) \\ = A_xB_y\hat{z} - A_xB_z\hat{y} \\ -A_yB_x\hat{z} + A_yB_z\hat{x} \\ +A_zB_x\hat{y} - A_zB_y\hat{x}\end{aligned}$$

שימו לב שמכפלת וקטורים דומים היא אפס ולשים לב לסדר המינוסים! בסה"כ:

$$= (A_yB_x - A_zB_y)\,\hat{x} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{z}$$

■

הערה 1.23. לרוב מסמנים את נוסחה הזו כקיצור ע"י דטרמיננטה:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \det\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}}$$

טענה 1.24. יהיו וקטורים $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$. אזי:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

הוכחה. טריוויאלית והושארה לקוראים. ■

טענה 1.25. יהי וקטור $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$, אזי:

$$\boxed{\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

הוכחה. תרגיל לקוראים בעזרת ההגדרות האלגבריות והגאומטריות של המכפלה הסקלרית. ■

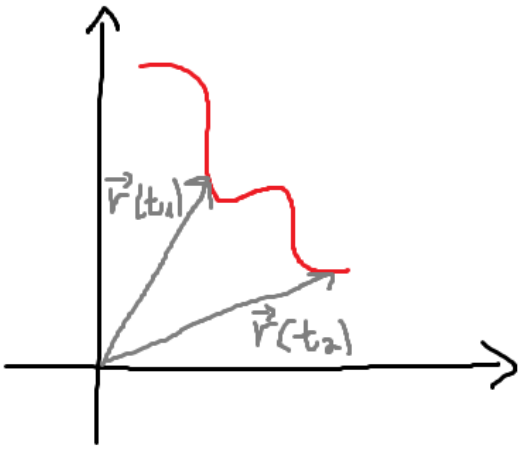
2 קינמנטיקה

2.1 מבוא והגדרות בסיסיות

המטרה שלנו היא להבין איך גוף זז. לשם כך נתחיל ממספר הגדרות אינטואטיביות ובסיסיות.

הגדרה 2.1. נסמן ב $\vec{r}(t)$ את וקטור המיקום של הגוף בזמן t. כל רכיב מסמל את המיקום בכל ציר בכל זמן:

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}}$$



איור 2.1: וקטור המיקום מצביע בזמן t מצביע על הנקודה בה היה הגוף בזמן זה

הגדרה 2.2. וקטור המהירות מוגדר להיות השינוי בזמן של מיקום הגוף:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}\right)}{\mathrm{d}t} = \boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{z}}$$

סימון 2.3. סימון מקובל לגזירה לפי הזמן: נקודות, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ וכיוצ"ב.

הגדרה 2.4. וקטור התאוצה של גוף מוגדר להיות:

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{x} + \ddot{y}(t)\,\hat{y} + \ddot{z}(t)\,\hat{z}$$

הגדרה 2.5. מסלול של גוף הוא קשר $y(x)$ (רכיב y כפונקציה של רכיב x, לרוב כאשר מדובר בדו מימד) או קשר כללי בין x, y, z (כאשר מדובר במרחב). העיקר – ללא תלות בזמן (t)!

דוגמה 2.6. נתון גוף הנע בצורה הבאה: $\vec{r}(t) = A\left(e^{\gamma t}\hat{x} + e^{-\gamma t}\hat{y}\right)$ כאשר $A, \gamma > 0$ קבועים.

1. מצאו את וקטור המהירות של הגוף.

2. ציירו (איכותית) את מסלול הגוף.

פתרון. נגזור רכיב רכיב:

$$\vec{v}(t) = A\left(\gamma e^{\gamma t}\hat{x} - \gamma e^{-\gamma t}\hat{y}\right)$$

כעת נרצה למצוא את מסלול הגוף. תחילה נעשה זאת באופן אינטואיטיבי ולאחר מכן נגיע בצורה פורמלית למסלול המבוקש. לפי וקטור המהירות, בכיוון $\hat{x}$ הגוף נע באופן אקספוננציאלי גדל (ז"א מהירותו גדלה). לעומת זאת הגוף נע נגד כיוון $\hat{y}$ אך באופן הולך ופוחת.
כעת, אם נתבונן בוקטור המיקום, נשים לב כי $\vec{r}(0) = (A, A)$, ז"א הוא מתחיל בנקודה על הרביע הראשון. כעת, כאשר $t \to \infty$, המיקום בציר $\hat{x}$ הולך וגדל, בעוד שהמיקום בציר $\hat{y}$ קטן והולך לאפס.
כעת נמצא את המסלול המפורש. נסמן:

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{\gamma t} \\ y(t) = Ae^{-\gamma t} \end{cases}$$

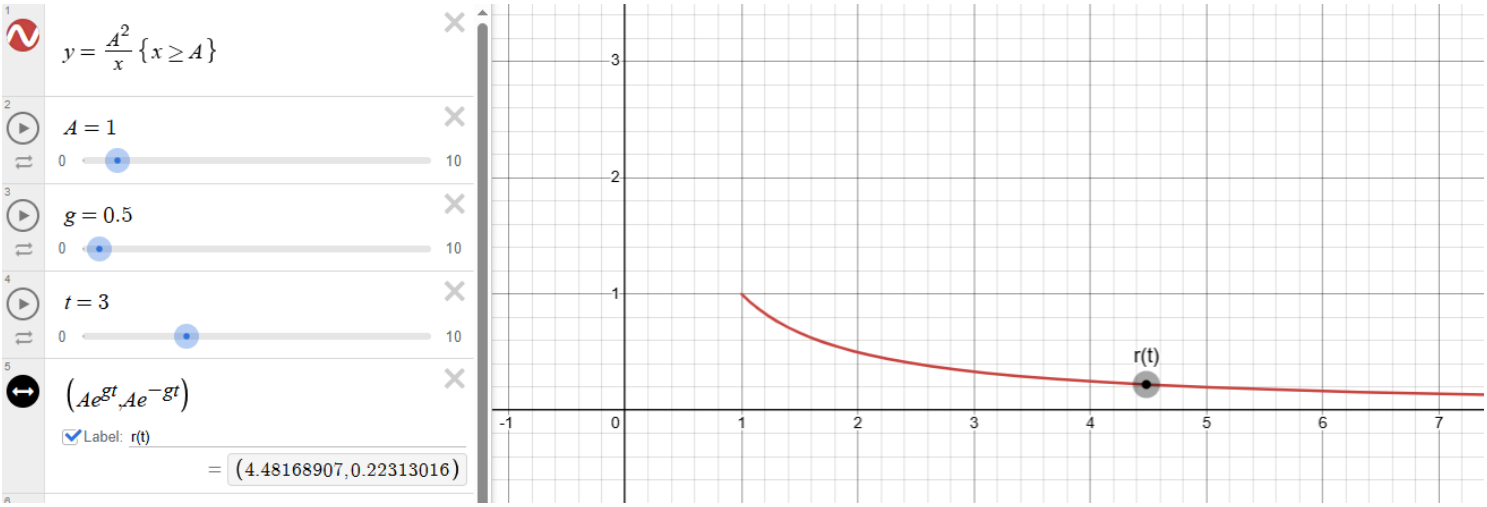
לכן אם נבודד את המשוואה הראשונה נקבל:

$$e^{-\gamma t} = \frac{A}{x(t)}$$

ולכן:

$$y(t) = \frac{A^2}{x(t)}$$

כלומר זוהי משוואת היפרבולה.



איור 2.2: תרשים של הדוגמה לעיל. ההמחשה נעשתה בעזרת desmos

דוגמה 2.7. נתון גוף הנע בצורה הבאה: $\vec{r}(t) = R\left(\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}\right)$, כאשר $R, \omega > 0$ קבועים.

1. מהו מסלול הגוף?
2. מהי מהירות הגוף וכיוונה?
3. מהו וקטור התאוצה וכיוונה?

פתרון. נפתור את כלל הסעיפים

1. נרצה למצוא את $y(x)$. נשים לב כי:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$$

לכן:

$$\begin{cases} x^2(t) = R^2\cos^2(\omega t) \\ y^2(t) = R^2\sin^2(\omega t) \end{cases}$$

ולכן:

$$x^2(t)+y^2(t)=R^2\cos^2(\omega t)+R^2\sin^2(\omega t)=R^2$$

כלומר קיבלנו תנועה מעגלית (כאשר הרדיוס הוא R)!

$$x^2+y^2=R^2$$

כאשר כיוון ההתקדמות הוא כנגד כיוון השעון.

2. רכיבי וקטור המהירות הם נגזרות רכיבי המיקום:

$$\begin{cases} v_x(t)=-R\omega\sin(\omega t) \\ v_y(t)=R\omega\cos(\omega t) \end{cases}$$

כלומר:

$$v(t)=-R\omega\sin(\omega t)\,\hat{x}+R\omega\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

נשים לב כי:

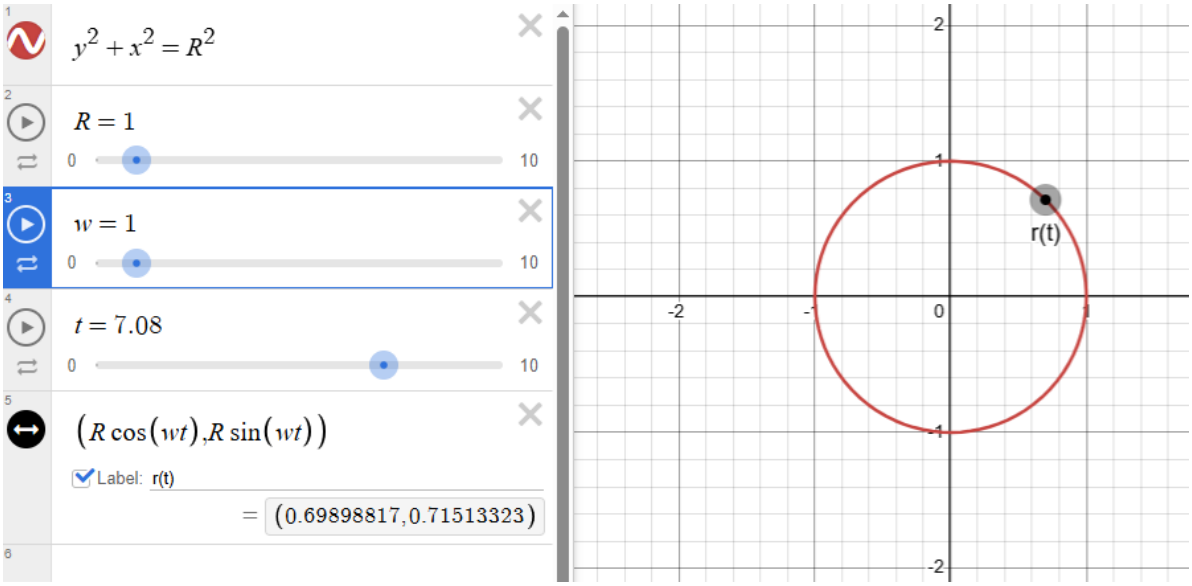
$$r(t)\cdot v(t)=R(\cos(\omega t)\,\hat{x}+\sin(\omega t)\,\hat{y})\cdot(-R\omega\sin(\omega t)\,\hat{x}+R\omega\cos(\omega t)\,\hat{y})$$
$$=-\omega R^2\cos(t)\sin(t)+\omega R^2\cos(t)\sin(t)=0$$

כלומר המהירות משיקה בכל זמן למיקום, ולכן משיקה למסלול בכל נקודה. באיזה כיוון? ככיוון התנועה. מה גודל המהירות? קל לחשב ולראות שגודל המהירות קבוע והוא ωR

3. נגזור את המהירות רכיב רכיב ונקבל את וקטור התאוצה ונקבל:

$$\vec{a}(t)=-R\omega^2\cos(\omega t)-R\omega^2\sin(\omega t)=-\omega^2(R\cos(\omega t)+R\sin(\omega t))=-\omega\vec{r}(t)$$

כלומר התאוצה היא כפל בסקלר $-\omega^2$ של המיקום.



איור 2.3: תרשים של הדוגמה לעיל. ההמחשה נעשתה בעזרת desmos

סיכום 2.8. בתנועה מעגלית קצובה (התנועה לעיל) מתקיים כי:

- $\dot{\theta}=\omega$ (קבועה)
- $|v|=\omega R$
- $|a|=\omega^2 R$

הערה 2.9. $\theta(t)$ מוגדר להיות שינוי הזווית בתנועה. במקרה שלנו השינוי הוא קבוע.

2.2 משוואות תנועה בסיסיות

לפי הגדרתנו לעיל, ברור כי מתקיים כי:

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)\,\mathrm{d}t + \vec{r}(t=0)$$

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)\;\mathrm{d}t + \vec{v}(t=0)$$

(כאשר האינטגרל הוא רכיב רכיב).

2.3 קואורדינטות פולריות

לרוב נרצה להשתמש במערכת קואורדינטות קלות יותר, בכדי לפתור תרגילים בצורה נוחה יותר.
נזכור כי כל וקטור דו מימד אפשר להציג ע"י גודל וזווית.

$$(x,y) \iff (r,\theta)$$

עובדה 2.10. נזכור כי:

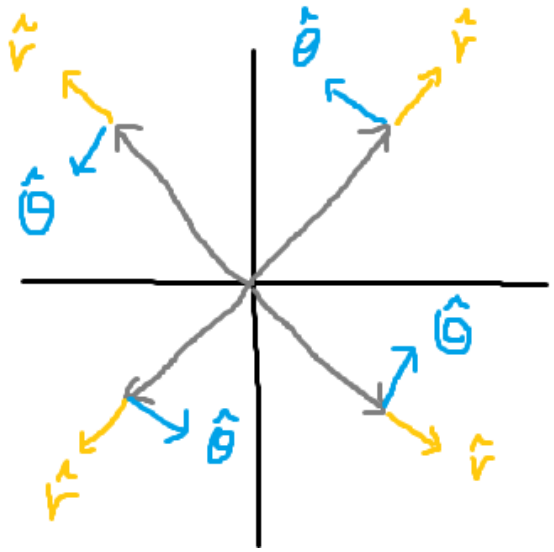
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

וכמו כן:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

הגדרה 2.11. בהנתן וקטור (x,y), נגדיר את וקטורי היחידה $\hat{r},\hat{\theta}$ בצורה הבאה:

- $\hat{r}$ – וקטור ההמשך של הוקטור (x,y) (כאשר אורכו יחידה). קוראים לרכיב זה גם הרכיב הרדיאלי, שכן הוא יוצא החוצה מווקטור המיקום.
- $\hat{\theta}$ – וקטור מאונך ל $\hat{r}$, כאשר כיוונו ככיוון של הזווית של הוקטור (x,y) (תזכורת: כיוון של זווית היא כנגד כיוון השעון)



איור 2.4: הגדרת וקטורי היחידה $\hat{r},\hat{\theta}$. שימו לב לכיוון $\hat{\theta}$ לפי הרביע בו נמצא הווקטור הנתון

כעת נרצה להמיר קואורדינטות קרטזיות לפולריות:

מסקנה 2.12. יהא מיקום $r(t)$. אזי:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = \boxed{r(t)\hat{r}}$$

כאשר:

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

הוכחה. לפי הגדרה, הכיוון של $\hat{r}$ הוא ככיוון הווקטור שהוגדר. כמו כן אין תנועה בזווית. ■

הערה 2.13. שימו לב כי באופן שקול:

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$$

מה לגבי מהירות? לא ניתן לגזור רכיב רכיב כיוון שיש תלות ב x, y.

מסקנה 2.14. הנוסחה לווקטור המהירות היא:

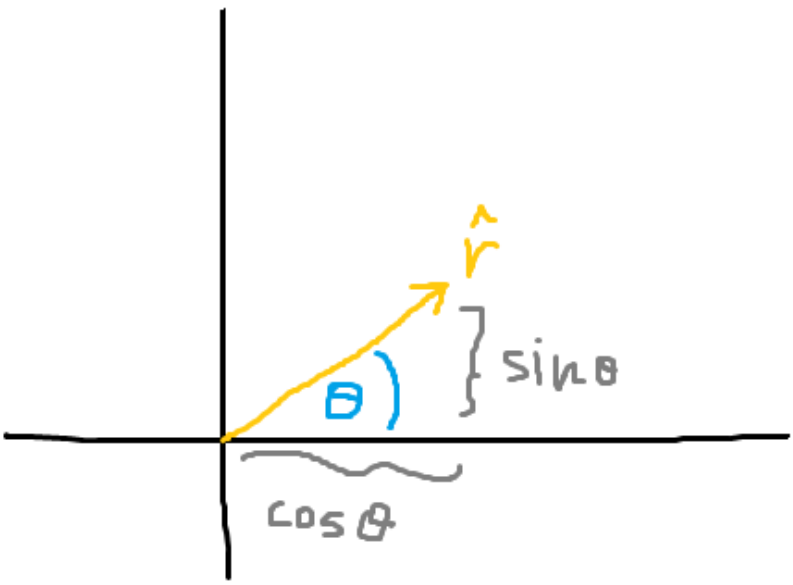
$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

הוכחה. נשים לב כי

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(r(t)\hat{r}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

בעזרת שימוש בכלל המכפלה. קל לראות כי בהנתן θ מסויימת:

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$$



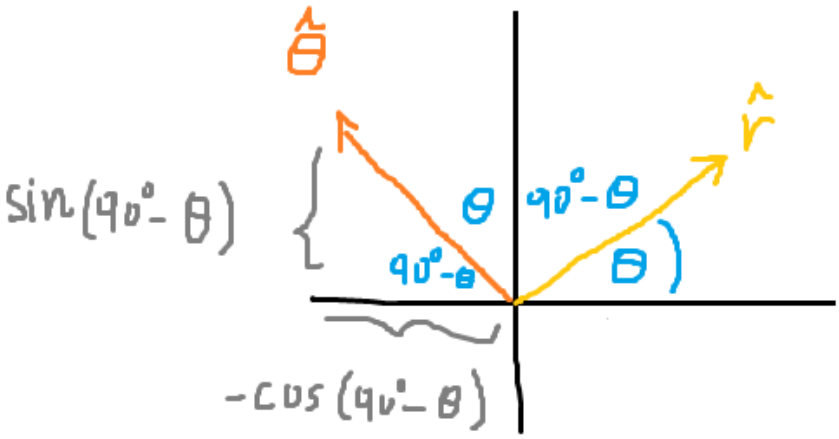
איור 2.5: פירוק לרכיבים של $\hat{r}$ (קל לוודא בעזרת טריגונומטריה)

לכן אפשר לגזור:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}r} = -\sin(\theta)\cdot\dot{\theta}\hat{x} + \cos(\theta)\cdot\dot{\theta}\hat{y} = \dot{\theta}\left(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}\right)$$

כמו כן אפשר לשים לב כי:

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$



איור 2.6: פירוק של $\hat{\theta}$ לרכיבים (קל לוודא בעזרת טריגונומטריה)

ולכן:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{\theta}$$

וביחד בסה"כ:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r}+r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

■

למה 2.15. מתקיים כי:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{r}$$

הוכחה. לפי הטענה מהמשפט הקודם:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(-\sin\left(\theta\right)\hat{x}+\cos\left(\theta\right)\hat{y}\right)}{\mathrm{d}t}=-\cos\left(\theta\right)\dot{\theta}\hat{x}-\sin\left(\theta\right)\dot{\theta}\hat{y}=-\dot{\theta}\hat{r}$$

■

מסקנה 2.16. נגזרת של התאוצה בקאורדינטות פולריות:

$$\boxed{\vec{a}=\left(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2\right)\hat{r}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}}$$

הוכחה. אפשר לגזור את $\vec{v}$ בעזרת כלל המכפלה והלמות קודם לכן. הושאר כתרגיל לקוראים. ■

הגדרה 2.17. הרכיב בתאוצה $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ נקרא התאוצה הראדיאלית.
הרכיב בתאוצה $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$ נקרא התאוצה המשיקית.

דוגמה 2.18. גוף נע לאורך ספירלה כך ש:

$$\begin{cases}r\left(t\right)=At^3\\\theta\left(t\right)=Bt^2\end{cases}$$

מצאו את וקטור המיקום, המהירות והתאוצה בקואורדינטות פולריות.

פתרון. וקטור המיקום הוא לפי הנוסחה:

$$\vec{r}(t) = At^3\hat{r}$$

וקטור המהירות הוא לפי הנוסחה:

$$\vec{v}(t) = 3At^2\hat{r} + At^3 \cdot 2Bt\hat{\theta} = 3At^2\hat{r} + 2ABt^4\hat{\theta}$$

וקטור התאוצה הוא לפי הנוסחה:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \left(6At - At^3\left(2Bt\right)^2\right)\hat{r} + \left(2 \cdot 3At^2 \cdot 2Bt + At^3 + 2B\right)\hat{\theta} \\ &= \left(6At - 4AB^2t^5\right)\hat{r} + 14ABt^3\hat{\theta}\end{aligned}$$

	קרטיזיות	פולריות
מיקום	$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$	$\vec{r} = r\hat{r}$
מהירות	$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$	$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
תאוצה	$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}$	$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$

טבלה 2: השוואה בין גדלים קינמטיים בקואורדינטות שונות

3 מבוא לחוקי ניוטון

הדינמיקה היא ענף במכניקה שעוסק בתנועה של גופים (או אי תנועה) בהנתן הכוחות הפועלים עליהם. בשביל להתחיל לדבר על עקרונות בסיסיים בדינמיקה, נתחיל ממעט הגדרות בסיסיות:

הגדרה 3.1. כוח הוא אינטראקציה בין שני גופים.

סימון 3.2. כוח מסמנים באות F, עם יחידות מידה של ניוטון $[F] = N$. שימו לב כי כוח הוא גודל וקטורי, הכיוון של הכוח חשוב שכן הוא מצביע על כיוון התנועה!

זו אכן הגדרה שאינה מוגדרת היטב (סליחה) אבל אפשר לדמיין שבין כל שני גופים יש מעין "משיכה ודחיפה" שגורמים לגופים לנוע (ככה אני חושב על זה, בכל אופן)

3.1 חוקי ניוטון

חוקי ניוטון, שפרסם סר אייזק ניוטון (שוקינג) בספרו Principia Mathematica היוו הבסיס והיסוד לפיזיקה המודרנית שלנו כיום. אע"פ המגבלות שמצאו בחוקים הללו בסקאלות של מסות קטנות ביותר (תורת הקוונטים) ומהירויות גדולות ביותר (תורת היחסות) חוקי ניוטון נחשבים הכרחיים להבנה בכדי להבין תאוריות פיזיקליות מתקדמות.
אציין שחוקי ניוטון נוסחו בעקבות תצפיות וניסויים, והביסוס המתמטי שלהם הגיע יותר מאוחר (מה שלא נעשה במסגרת קורס זה)

3.1.1 החוק הראשון של ניוטון

החוק הראשון של ניוטון עוסק במתי גוף נע ומתי לא. בכדי לתאר תנועה, ובכדי להגיד שגוף נע - עלינו להתייחס למערכת הצירים שבחרנו. כמו כן, נדרוש שהמערכת תקיים אינטואיציה מאוד פשוטה: בהינתן שאין אף כוח שפועל על גוף מבודד, הגוף נע במהירות קבועה. (שימו לב שהמהירות הקבועה תלויה גם במערכת שאנחנו בוחרים, ומכאן האינטואיציה לגביה. אם למשל המערכת תנוע כתלות בזמן, ייתכן שהגוף יאיץ)

הגדרה 3.3. מערכת צירים נקראת <u>אינרציאלית</u> אם מתקיים בה לכל גוף מבודד:

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \iff \vec{a} = 0 \iff \vec{v} = C}$$

כאשר C קבוע.

אתן הסבר אינטואיטיבי להגדרה זו.
נניח שאנחנו מגלגלים גולה על רצפה אידאלית (ז"א ללא חיכוך). הגלגול אינו אלא הענקת כוח בנקודת זמן, נניח $t = 0$. כעת, הגולה מתגלגלת אך ללא חיכוך וללא כוחות שפועלים עליה (הגלגול של הגולה היה נקודתי). מה יקרה? הגולה תמשיך לנוע ולנוע ולנוע עד אין קץ, כל עוד לא נעצור אותה. היא לא תאט ותעצור (כי אין חיכוך) והיא לא תאיץ כי לא הפעלתי על הגולה דבר – ולכן הגולה תנוע במהירות קבועה.
הבעיה? לא בכל מערכת צירים זה בהכרח יהיה כך. ייתכן שנבחר מערכת צירים, כך שהצירים נעים בזמן ובכך מהירות הגוף לא תהיה קבועה. לשם כך מגיע החוק הראשון של ניוטון (שאינו מובן מאליו כלל וכלל):

משפט 3.4 (חוק ההתמדה)**.** בכל מערכת פיזיקלית ניתן להגדיר מערכת צירים אינרציאלית.

3.1.2 החוק השני של ניוטון

החוק השני של ניוטון מתאר את הקשר בין תאוצה של גוף לבין הכוחות הפועלים עליו.

משפט 3.5. תהי מערכת אינרציאלית המתארת מערכת פיזיקלית. אזי לכל גוף מבודד במערכת מתקיים:

$$\vec{a} \propto \sum \vec{F}$$

ובעברית: ככל שפועל על גוף יותר כוח, הוא מאיץ יותר.

הגדרה 3.6. הגודל (הסקלרי) המקיים לכל t:

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}}$$

נקרא <u>המסה האינרציאלית</u> (או מסה בקיצור). המסה היא תכונה פנימית של כל גוף מבודד.

מסקנה 3.7. אם $[m] = kg$ אזי:

$$[N] = \frac{m \cdot kg}{s^2}$$

אעיר כי הנ"ל טוב כאשר המסה הינה קבועה. במקרים בהם המסה אינה קבועה נשתמש בתנע, אך בנושאים אלו נעסוק בהמשך.

3.1.3 החוק השלישי של ניוטון

הגדרנו כוח להיות אינטראקציה, ולכן שני גופים צריכים להיות מעורבים באינטרקציה (באופן אינטואיטיבי). נניח שגוף A מפעיל כוח על גוף B. מה ניתן לומר על גוף B פרט לעובדה ש A מפעיל עליו כוח?

משפט 3.8 (חוק הפעולה והתגובה)**.** יהיו שני גופים A, B. נניח כי גוף A מפעיל כוח $\vec{F}_{A\to B}$ על גוף B. אזי גוף B מפעיל כוח $\vec{F}_{B\to A}$ על גוף A ובנוסף מתקיים:

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}}$$

הערה 3.9. שימו לב כי החוק השלישי של ניוטון מבדיל בין תאוצה שנגרמת מכוח (ואז מופעל כוח בחזרה, אותו ניתן למדוד ולהיווכח כי אכן הופעל כוח) או משום שמערכת הצירים של הצופה אינה אינרציאלית (ואין אף כוח שניתן למדידה).

3.2 כוחות בסיסיים

בבואנו לדבר על כוחות ופתירת שאלות בסיסיות במכניקה, עלינו להכיר כוחות אשר קיימים בעולם בכדי להגיד עליהם דברים.

הגדרה 3.10. כוח הגרביטציה, אשר מפעיל ופועל על כל גוף מבוטא ע"י mg, כאשר m מסת הגוף וg קבוע. כוח הגרביטציה חלש מאוד ולכן לא נתייחס לכוחות גרביטציה שמפעילים גופים שאינם מאסיבים (כמו: כדו"א). בכדו"א מתקיים כי:

$$g \approx 9.81$$

כיוון כוח הגרביטציה (בהנתן שמדובר בכדו"א) הוא תמיד כלפי מטה.

הגדרה 3.11. אם גוף נמצא על משטח ולא "נופל דרכו", המשטח מפעיל על הגוף כוח אשר נקרא <u>כוח נורמל</u> (לעיתים מבוטא באות N). שמו הוא מכיוון שכיוונו תמיד מאונך לכיוון המשטח שעליו נמצא הגוף.

הגדרה 3.12. אם גוף קשור לחוט, אזי הגוף מפעיל כוח על החוט בגלל שהחוט מתוח. לכוח זה נקרא <u>מתיחות</u> ויסומן באות T (מלשון Tension בלעז).

טענה 3.13. נניח שני מסות (נסמנם m_1, m_2) קשורות בחוט אידיאלי (כלומר מסת החוט אפסית). נניח ששתי המסות נעות בתאוצה קבועה a. אזי כוחות המתיחות בכל אחד מן קצוות החוט שוות בגודלם.

הוכחה. נבחר ציר שכיוונו יהיה ככיוון ההתקדמות של המערכת הכוללת. נסמן ב T_1 את המתיחות ש m_1 מפעילה וכן ב T_2 את המתיחות ש m_2 מפעילה.
לכן לפי החוק השני של ניוטון, כיוון שהחוט נע ביחד עם המסות באותה תאוצה (אחרת לא הייתה תנועה בתאוצה קבועה כלל):

$$T_1 - T_2 = \sum \vec{F} = m_{\text{string}} a$$

אבל $m_{\text{string}} = 0$ כי החוט אידיאלי ולכן:

$$T_1 - T_2 = 0$$
$$|T_1| = |T_2|$$

(ברור כי הוקטורים אינם שווים כי הכיוונים מנוגדים; אבל הגדלים כן) ■

3.3 דוגמאות בסיסיות

חוקי ניוטון עוזרים לפתור מגוון מאוד רחב של שאלות. אתאר אלגוריתם מגניב איך משתמשים בחוקים בכדי לפתור בעיות (פשוטות).

אלגוריתם 1 פתרון בעיות בסיסיות בעזרת שלושת חוקי ניוטון

---

1. נביט במערכת ונבודד את כל הגופים הרלוונטים בה.
2. נגדיר מערכת צירים ואת הכיוון החיובי. טיפ: כדאי לבחור את הכיוון ככיוון התנועה (של לפחות גוף אחד) בכדי לפשט את המשוואות אח"כ.
3. לכל גוף, נסרטט את הכוחות הפועלים על הגוף (שימו לב, לא הכוחות שהגוף מפעיל אלא שפועלים עליו! סביל!). נהוג לסרטט את הכוחות כחצים היוצאים מהגוף (על אף הבלבול) ולתת להם שמות משמעותיים.
4. לכל גוף נרשום את משוואת התנועה שלו (חוק ראשון או חוק שני של ניוטון). מומלץ לכתוב את המשוואה לכל ציר בנפרד כדי להימנע מטעויות.
5. במידה ויש אילוצים, יש לכתוב את משוואות האילוצים. (דוגמאות בהמשך)
6. לפתור את מערכת המשוואות הכוללת.
7. לבדוק האם התשובה הגיונית ואינטואיטיבית לנו. זו דרך טובה לבדוק האם הייתה לנו טעות בדרך. מומלץ לבדוק גם מצבי קיצון, בהינתן פרמטרים.

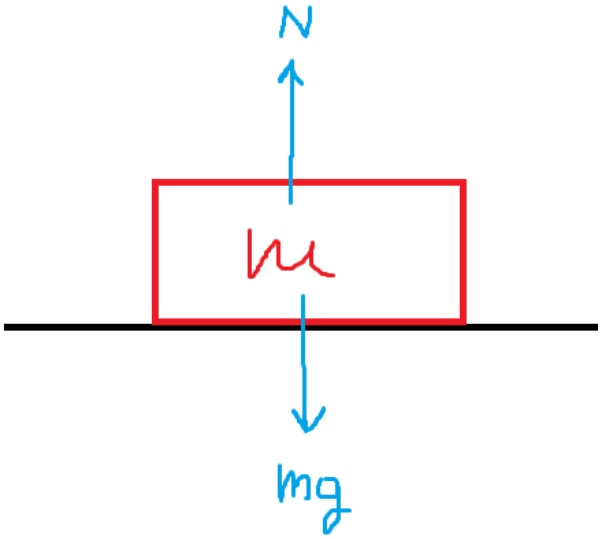
כעת נפתור מספר בעיות שעשינו בהרצאה:

דוגמה 3.14. גוף בעל מסה m נח (ביינג צ'ילינג בלעז) על מישור. מה ניתן לומר על הכוחות הפועלים עליו?



איור 3.1: תרשים של הבעיה

פתרון. כיוון שהגוף ביינג צ'ילינג הוא לא זז בציר האופקי ואף לא בציר האנכי. נבחר את הכיוון החיובי של הציר האנכי להיות כלפי מעלה. נסרטט תרשים כוחות על הגוף:



איור 3.2: תרשים כוחות של הבעיה.

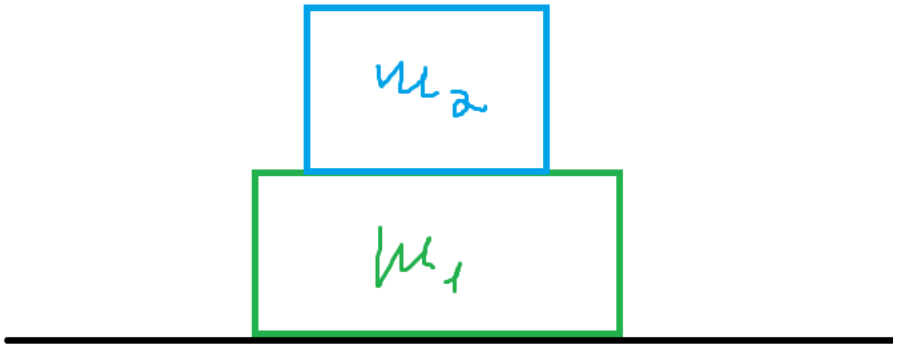
כעת כיוון שהגוף נח תאוצתו $a=0$ (כי מהירותו קבועה $v=0$) ולכן:

$$N-mg=0$$

כלומר:

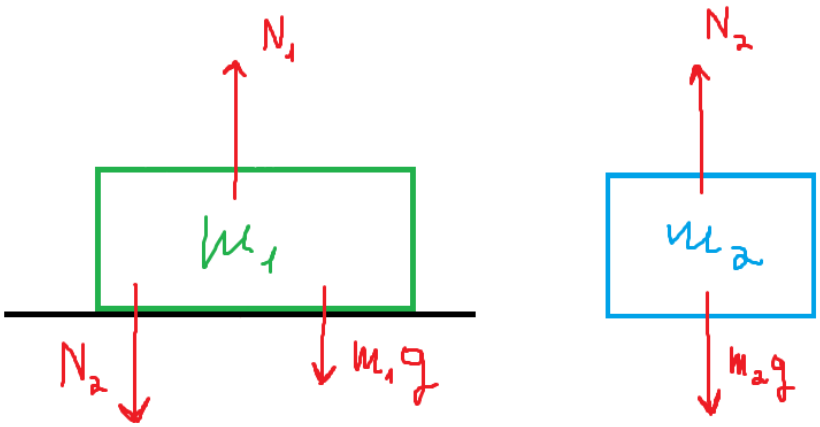
$$N=mg$$

דוגמה 3.15. שני גופים אחד על השני שרויים במנוחה. מהם הכוחות הפועלים על כל הגופים?



איור 3.3: תרשים של הבעיה

פתרון. כמו מקודם, נקבע את הציר בכיוון האנכי, ואת הכיוון כלפי מעלה. נסרטט תרשים כוחות על כל גוף בנפרד:



איור 3.4: תרשים כוחות על כל גוף בנפרד

על m_2 פועלים שני כוחות: כוח המשיכה ($m_2 g$) וכוח הנורמל שמפעיל m_1 (הוא סוג של משטח בפני עצמו! הרי m_2 לא נופל דרך m_1!).
על m_1 פועל כוח המשיכה ($m_1 g$). כמו כן, מהחוק השלישי של ניוטון, בגלל כוח הנורמל לעיל, m_2 מפעיל כוח ששווה בגודלו אך הפוך בכיוונו על m_1, כלומר כלפי מטה.
כיוון שהמסות נמצאות במנוחה, החוק הראשון של ניוטון תקף לגביהם. נרשום את משוואת התנועה עבור שני הגופים.

$$m_1: \quad N_1 - m_1 g - N_2 = 0$$

$$m_2: \quad N_2 - m_2 g = 0$$

כעת יש לפתור את מערכת המשוואות המתקבלת. יש לשים לב, המשתנים שלנו הם N_1, N_2. הפרמטרים שלנו הם m_1, m_2, g (שכן הם נתונים כבר מתחילת השאלה). נביט במשוואה על m_2 ונקבל:

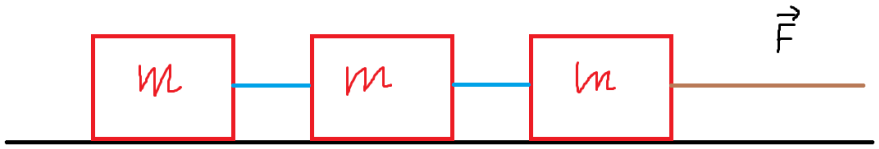
$$N_2 = m_2 g$$

ולכן אם נציב במשוואה על m_1:

$$N_1 - m_1 g - m_2 g = 0$$
$$N_1 = g\left(m_1 + m_2\right)$$

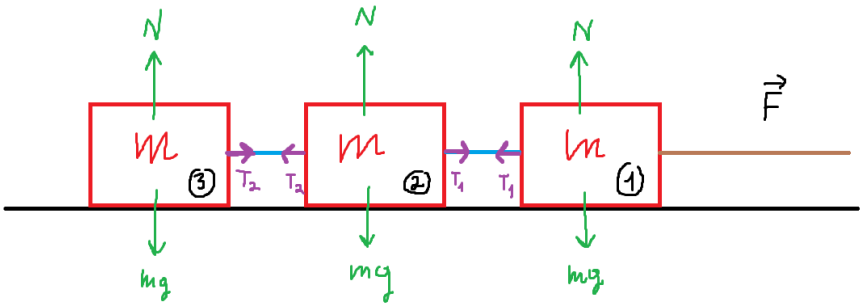
לסיום: האם פתרון זה הגיוני? כן, משום שהרצפה צריכה להתנגד לכוחות המשיכה של שני הגופים, ולכן מפעילה כוח נגדי ששווה לסכום שני הכוחות הללו על m_1 (כי רק איתו יש לה אינטרקציה)

דוגמה 3.16. רכבת המורכבת משלושה קרונות נמשכת ע"י כוח חיצוני (F). כל הקרונות בעלות אותה מסה (m) וקשורות זו לזו בחוט אידיאלי כמתואר באיור. החיכוך בין הרצפה לקרונות זניח. מהו הכוח הפועל על כל קרון?



איור 3.5: תרשים הבעיה

פתרון. התנועה היא בכיוון הציר האופקי בלבד, ולכן הכוח הנורמל על כל אחת מן המסות שווה ל mg. לפיכך נתעסק רק בציר האופקי (ציר ה x) כי רק שם יש תנועה. נקבע את כיוון ציר זה ככיוון ההתקדמות של הרכבת.



איור 3.6: תרשים כוחות של הבעיה. שימו לב שהמתיחות של כל חבל שונה, שהרי אלו חבלים שונים אשר קשורים לגופים שונים.

נביט בגוף שהוא כל המערכת. לכן לפי החוק השני של ניוטון:

$$F = \sum \vec{F} = m_{\text{train}} a = 3m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{3m}$$

כעת, כיוון שכל המערכת נוסעת בשלמותה ביחד, התאוצה של כל מסה שווה ל $\frac{F}{3m}$. נביט בגוף 1:

$$F - T_1 = \sum \vec{F} = m \cdot \frac{F}{3m}$$

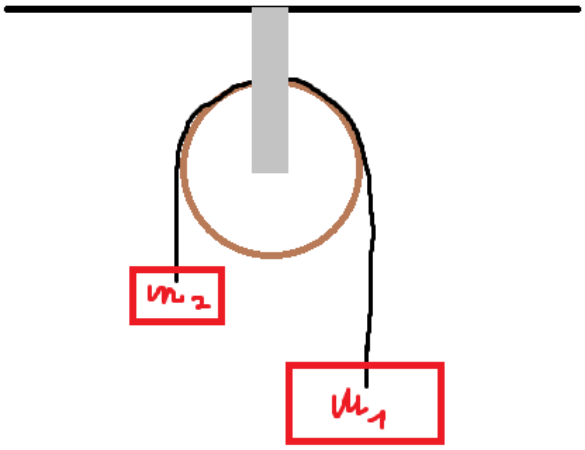
$$T_1 = F - \frac{F}{3} = \frac{2F}{3}$$

כעת נביט בגוף 2:

$$\frac{2F}{3} - T_2 = \sum \vec{F} = \frac{F}{3}$$

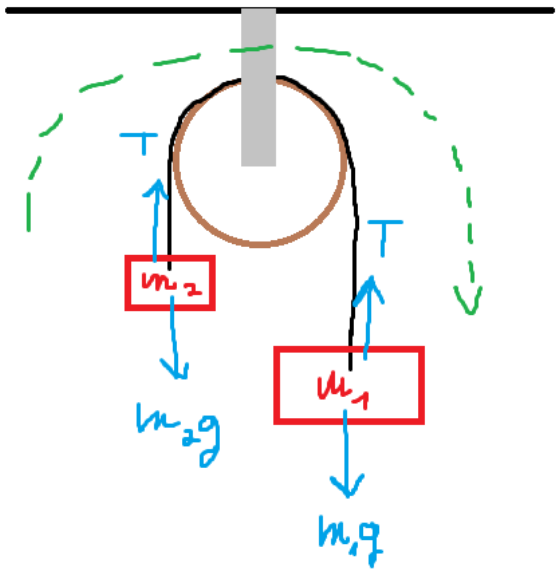
$$T_2 = \frac{F}{3}$$

דוגמה 3.17. (מכונת אטווד) שני גופים קשורים בחוט על גלגלת חסרת מסה כמתואר באיור. החיכוך בין הגלגלת לחוט זניח. נניח כי $m_1 > m_2$, כמתואר באיור. מהי תאוצת המערכת?



איור 3.7 : המחשה של הבעיה

פתרון. אינטואיטיבית, ברור לנו כי m_1 המסה הגדולה יותר תיפול, ואילו m_2 תתרומם. לפיכך, נקבע את מערכת הצירים בצורה מעוקמת ככיוון התנועה, כך שכיוון הציר יהיה למעלה עבור m_2 ולמטה עבור m_1.



איור 3.8 : תרשים כוחות של הבעיה

כעת כל המערכת נעה ביחד ולכן לכל גוף בה יש את אותה תאוצה (נסמנה a). לכן משוואות התנועה הן עבור כל מסה :

$$m_1: \quad m_1 g - T = m_1 a$$

$$m_2: \quad T - m_2 g = m_2 a$$

יש לנו שני משתנים (T, a) בשתי משוואות ולכן ניתן לפתור את המערכת שקיבלנו. נסכום את שתי המשוואות ונקבל :

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$(m_1 - m_2)\, g = (m_1 + m_2)\, a$$
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

שימו לב: תמיד $a > 0$ שכן $m_1 > m_2$.
כעת בוא נבדוק מצבי קיצון:
אם $m_1 \gtrsim m_2$ (גדול אך בממש קצת), אזי $m_1 - m_2 \approx 0$ ולכן $a \approx 0$, כלומר אנחנו במצב של שיווי משקל!
אם $m_1 \gg m_2$ (גדול מאוד) אזי $m_1 - m_2 \approx m_1$ וגם $m_1 + m_2 \approx m_1$ ולכן $a \approx g$, כלומר הגוף נופל נפילה חופשית!

שאלה זו נפתרה בעזרת טריק, אך טריק זה לא יוכל לעבוד בכל המקרים. אציע דרך נוספת לפתור תרגיל זה בעזרת אילוץ:

3.4 פתירת בעיות בעזרת אילוצים

הצעה 3.18. אילוץ הוא השלכה פיזיקלית על המערכת, כלומר משהו שאנו מניחים (הנחה מבוססת) על אף שלא נאמר נתון זה במפורש בבעיה. בשיטה זו אנחנו מטפלים בתאוצת כל גוף בנפרד, ומתוך האילוץ מגיעים לקשר על התאוצות.
שימו לב: אילוץ אינו נובע מחוקי ניוטון. לרוב האילוץ ינבע משיקולים קינמטיים (איך התנועה של המערכת אמורה להיות)

נפתור את הבעיה הקודמת בעזרת אילוץ בכדי להסביר את הרעיון.

פתרון. נגדיר את כיוון הציר כלפי מטה. כעת כל גוף נע "בפני עצמו" ולכן התאוצה של כל גוף אינה זהה. לכן המשוואות יהיו:

$$m_1: \quad m_1 g - T = m_1 a_1$$
$$m_2: \quad m_2 - T = m_2 a_2$$

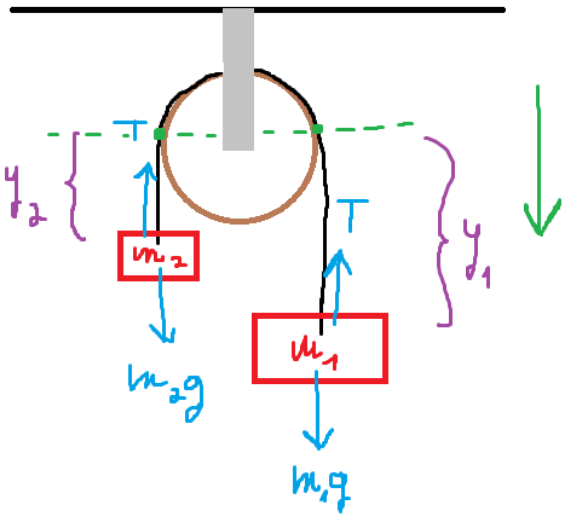
ועלינו למצוא קשר בין a_1 לa_2. האילוץ שלנו יהיה העובדה שאורך החוט קבוע לכל זמן התנועה. זה אינו נתון, אך זו הנחה סבירה שניתן להניח על המערכת.
נקבע את ראשית הציר בקצוות הגלגלת, היכן . נסמן את הגובה של המסה m_1 בזמן t להיות y_1, ואת הגובה של m_2 להיות y_2 בהתאמה. כעת, אם נסמן את רדיוס הגלגלת ב R, אזי ניתן להביע את אורך החוט ע"י:

$$\ell = y_1 + y_2 + \pi R$$

(האורך בצד ימיו, האורך בצד שמאל, החוט שנמצא על החצי העליון של הגלגלת). נגזור פעמיים את שני אגפי המשוואה ונקבל:

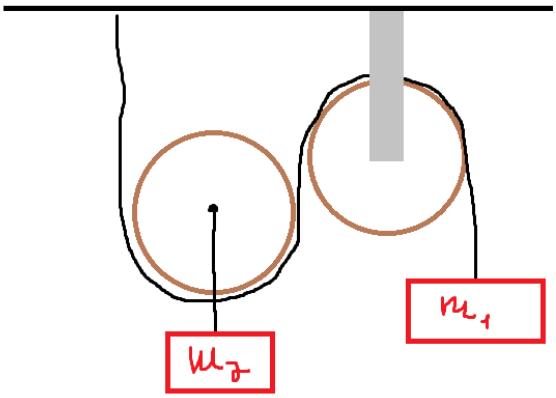
$$0 = v_1 + v_2$$
$$0 = a_1 + a_2$$
$$a_1 = -a_2$$

ומכאן ניתן לקבל את אותן המשוואות שקיבלנו לפני כן.



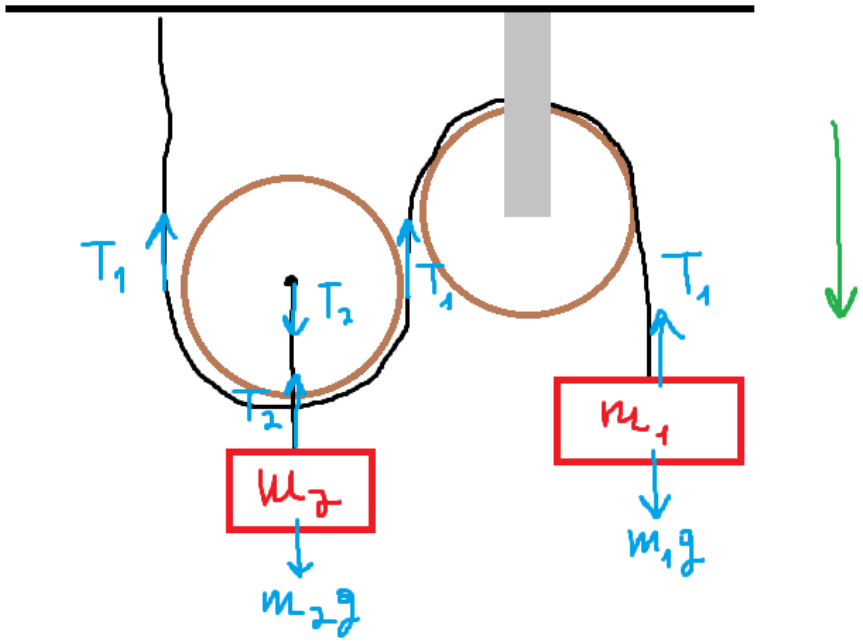
איור 3.9: המחשה של הבנייה שעשינו במהלך הפתרון

דוגמה 3.19. על גלגלת חסרת מסה מונחת בצד אחד מסה, ובצידה האחר עוד גלגלת, זהה לקודמתה, המחוברת למסה נוספת כמתואר באיור. כל החוטים המעורבים במערכת הינם אידיאלים. החיכוך בין הגלגלת לחוטים זניח. מהי תאוצת המערכת?



איור 3.10 : תרשים של הבעיה

פתרון. מדובר כאן בתנועה בציר האנכי. נקבע את כיוון ציר זה למטה, ואת הראשית בתקרה. נזכור כי יש לנו שלושה גופים במערכת, m_1, m_2 והגלגלת השמאלית שנעה (הימנית סטטית). נסמן את תאוצות המסות ב a_1, a_2 (כיוון שהגלגלת השמאלית נעה יחד עם m_2 יש לה את אותה התאוצה כמוהו). כמו כן, את המתיחות בחבל הראשי נסמן ב T_1 ובחבל שקשור לגלגלת המתנדנדת נסמן ב T_2.



איור 3.11 : תרשים כוחות על שלושת הגופים במערכת. איזה כוח לכאורה שכחתי לציין?

כעת נרשום את המשוואות של חוקי ניוטון :

$$m_1 : \quad m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 : \quad m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

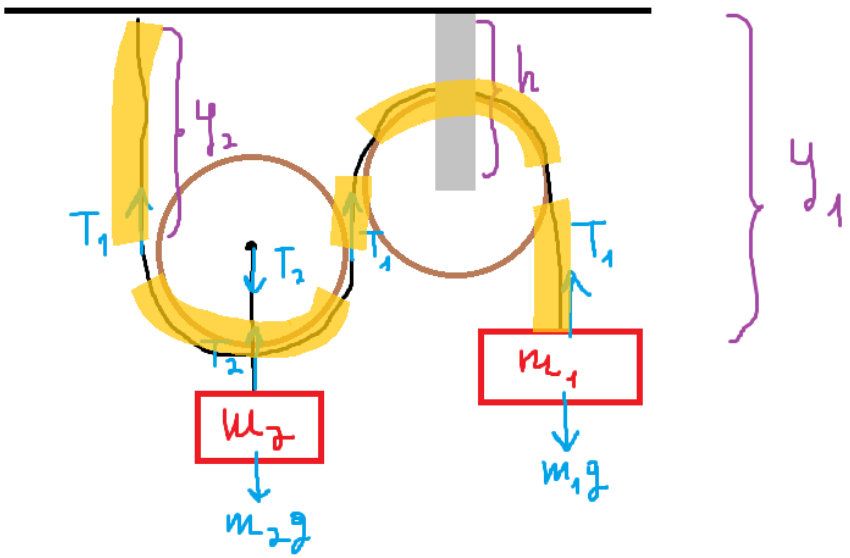
$$\text{pulley} : \quad T_2 - 2T_1 + m_p g = m_p a_2$$

אבל $m_p = 0$ בגלל הנתונים ולפיכך ניתן לנסח את המשוואה האחרונה כך:

$$T_2 - 2T_1 = 0$$

$$T_2 = 2T_1$$

יש לנו ארבעה משתנים (T_1, T_2, a_1, a_2) ושלוש משוואות; נשתמש באילוץ.
האילוץ שלנו יהיה העובדה שאורך החוט (המרכזי) קבוע בזמן. נסמן ב y_1 את המרחק ש m_1 עשה בזמן t יחסית לראשית, ובy_2 את המרחק בין מרכז הגלגלת הנעה לראשית. כמו כן, נסמן ב h את המרחק בין מקכז הגלגלת הסטטית לראשית. ולסיום נסמן ב R את רדיוס הגלגלת.



איור 3.12: חלוקת החוט המרכזי למקטעים

את החוט המרכזי ניתן לחלק לחמישה מקטעים:

- בין הגלגלת לתקרה. אורך המקטע: y_2
- על חצי הגלגלת הנעה. אורך המקטע: πR
- בין הגלגלת הנעה לגלגלת הסטטית. אורך המקטע: $y_2 - h$
- על חצי הגלגלת הסטטית. אורך המקטע: πR
- בין הגלגלת הסטטית לm_1. אורך המקטע: $y_1 - h$

לכן בסה"כ:

$$\ell = y_2 + \pi R + y_2 - h + \pi R + y_1 - h = 2y_2 + y_1 + 2(\pi R - h)$$

נגזור פעמיים את המשוואה ונקבל:

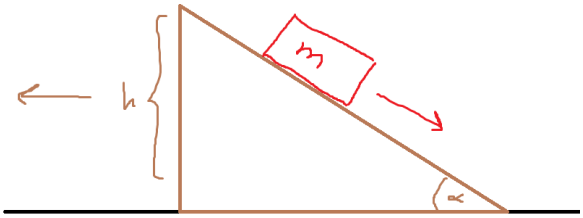
$$0 = 2\dot{y}_2 + \dot{y}_1$$

$$0 = 2\ddot{y}_2 + \ddot{y}_1 = 2a_2 + a_1$$

$$a_1 = -2a_2$$

כעת קיבלנו את המשוואה הרביעית ובכך ניתן לפתור את המערכת. אשאיר את האלגברה הזו כתרגיל לקוראים.

דוגמה 3.20. מסה m נעה על מישור משופע עם זווית α וגובה h. אממה, המישור לא קבוע וע"כ גם כן זז (המישור נמצא על שולחן מאוזן). החיכוך בין המסה למישור, ובין המישור לשולחן זניח. מהי תאוצת המערכת?

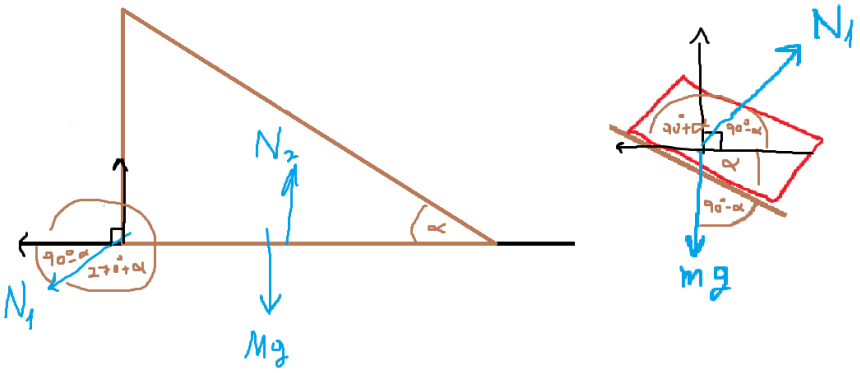


איור 3.13 : תרשים הבעיה

פתרון. נסמן את מסת המישור ב M. נקבע את כיוון ציר y להיות כלפי מעלה, ואת ציר x להיות כלפי שמאלה (ככיוון תנועת המישור). בעזרת גאומטריה, ניתן לפרק לרכיבים את כוח הנורמל של המסה (N_1) לפי הרכיבים שבחרנו ולקבל:

$$m: \begin{matrix} -N_1 \sin(\alpha) = ma_m^x \\ N_1 \cos(\alpha) - mg = ma_m^y \end{matrix}$$

$$M: \begin{matrix} N_1 \sin(\alpha) = Ma_M \\ -N_1 \cos(\alpha) - Mg + N_2 = 0 \end{matrix}$$



איור 3.14 : תרשים כוחות על המסה ועל המשטח. תרגיל עבור הקוראים לפרק לרכיבים את N_1

יש לנו חמישה נעלמים (תאוצות בציר x, y, תאוצת המישור, שני הנורמלים) אך רק ארבע משוואות. ניעזר באילוץ!
האילוץ שלנו יהיה העובדה שהמסה תמיד תהיה על המישור. נסמן ב x, y את המיקום על הצירים של המסה בזמן t. כמו כן, נסמן בx_M את המיקום בציר x של קצה המישור בציר x. לכן, המסה תהיה על הקו של השיפוע, ומכיוון שכך, מקיימת את משוואת הישר. ניתן בעזרת טריגונומטריה (או ממשפט באנליטית) לקבל:

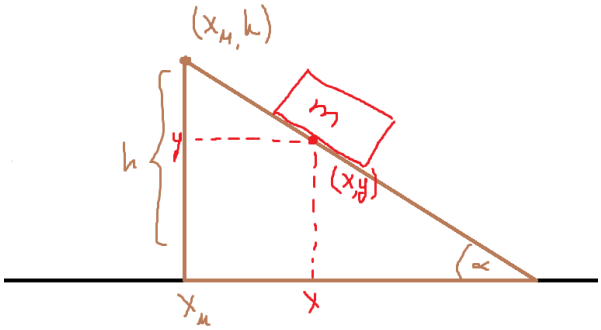
$$\frac{h-y}{x_M - x} = \tan(\alpha)$$

כלומר:

$$h - y = (x_M - x)\tan(\alpha)$$

נגזור פעמיים את המשוואה ונקבל:

$$-\ddot{y} = (\ddot{x}_M - \ddot{x})\tan(\alpha)$$



איור 3.15 : המחשה של האילוץ

3.5 בעיות בקואורדינטות פולריות

גם בקואורדינטות פולריות, החוק השני של ניוטון נשמר :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

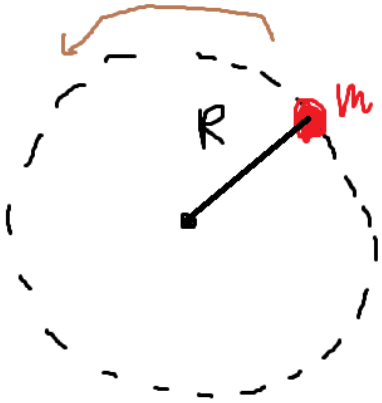
אך ניתן לפרק את החוק הנ"ל לקואורדינטות $\hat{r}, \hat{\theta}$:

$$\sum F_r = ma_r$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta$$

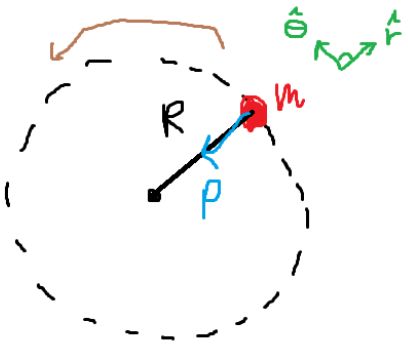
כמו כן, זכרו כי נוהגים לסמן $\dot{\theta} = \omega$.
נפתור מספר בעיות בסיסיות, בשביל להמחיש את הרעיון :

דוגמה 3.21. מסובבים מסה m אשר קשורה לחוט בגודל R במישור אופקי (כלומר על רצפה כלשהי). הזמן לסיבוב אחד הוא T (זהו זמן המחזור של התנועה). מצאו את גודל המתיחות של החוט.



איור 3.16 : המחשה של הבעיה

פתרון. נגדיר מערכת צירים כך שיוון התקדמות המסה. $\hat{r}$ יהיה בכיוון רדיאלי (יוצא מן המעגל), ו $\hat{\theta}$ מאונך לו. הכוח היחיד הפועל על m הוא כמובן כוח המתיחות (נסמנו P), אשר פועל לכיוון תוך המעגל.



איור 3.17 : תרשים כוחות של הבעיה

לפי החוק השני של ניוטון :

$$\sum F = ma$$

נפרק לרכיבי $\hat{r}, \hat{\theta}$:

$$\sum F_r = ma_r$$
$$\sum F_\theta = ma_\theta$$

בכיוון $\hat{r}$:

$$-P = \left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)$$

אבל הגוף נע ברדיוס קבוע, ולכן $\ddot{r} = 0$:

$$P = Rm(\dot{\theta})^2$$

(זכרו כי הרדיוס קבוע והוא R). או בכתיב יותר מקובל :

$$P = Rm\omega^2$$

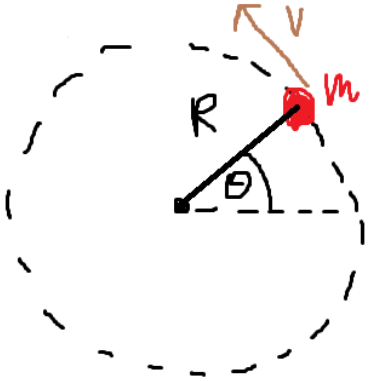
אבל מכיוון שקצב השינוי קבוע, הוא :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ולכן :

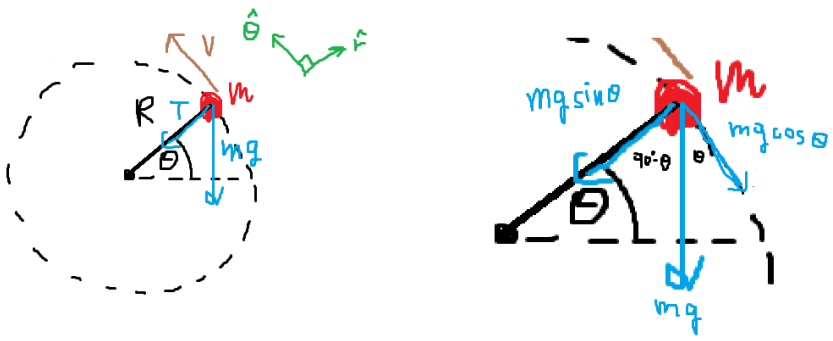
$$P = mR \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

דוגמה 3.22. כעת, המערכת נמצאת על מישור מאונך ; כלומר על קיר. ברגע מסוים, המסה נמצאת בזווית θ ובמהירות v. מצאו את מתיחות החוט.



איור 3.18 : המחשה של השאלה. שימו לב כי הפעם המערכת מוצמדת על קיר ולכן המסה מרגישה את כוח הכבידה

פתרון. נקבע מערכת צירים פולרית. הכוחות הפועלים על הגוף הם המתיחות (נסמנו ב T) ו mg למטה, כמתואר באיור.



איור 3.19 : תרשים כוחות של הבעיה. שימו לב לפירוק לגורמים של mg

לאחר פירוק לרכיבים נקבל :

$$\sum F_r = ma_r$$

$$-T - mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\omega^2)$$

נזכור כי הרדיוס קבוע ולכן :

$$-T - mg\sin\theta = -mR\omega^2$$

$$T = mR\omega^2 - mg\sin\theta$$

נזכור כי המהירות בקואורדינטות פולריות :

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

לאחר פישוט :

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}$$

ולכן :

$$\omega = \frac{v}{R}$$

נציב :

$$T = mR\left(\frac{v}{R}\right)^2 - mg\sin\theta$$

$$T = \frac{mv^2}{R} - mg\sin\theta$$

כעת בציר θ :

$$\sum F_\theta = ma_\theta$$

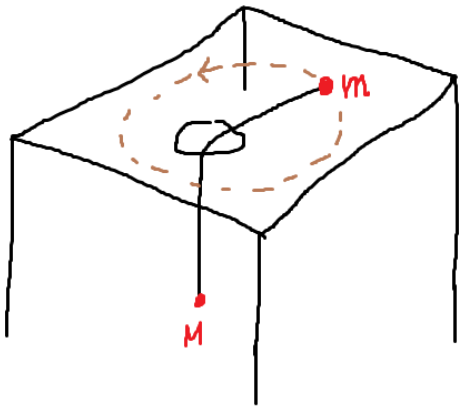
$$-mg\cos\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

נצמצם (כי $\dot{r} = 0$ שכן הרדיוס קבוע) ונקבל :

$$-g\cos\theta = R\ddot{\theta}$$

זו מד"ר עבור θ, שאין לנו כלים פרקטיים בשלב זה לפתור...

דוגמה 3.23. בשולחן ובו חור השחילו חוט. את חציו שמו על השולחן וחציו נופל דרך החור. קושרים מסה m לקצה אשר על השולחן ולקצה השני קושרים מסה M כמתואר באיור. ברגע $t = 0$ מעניקים למסה m מהירות זוויתית ω_0 נגד כיוון השעון. האם המסה M תעלה או תרד? חלקו למקרים.



איור 3.20 : סרטוט של הבעיה

פתרון. המסה m מסתובבת במישור, לכן על המישור נקבע מערכת צירים פולרית. הכוח היחיד (במישור) שפועל על m הינו המתיחות (T), שפועל בכיוון $\hat{r}$ בלבד.

$$\sum F_r = ma_r$$

$$-T = m(\ddot{r} - r\omega^2)$$

ובכיוון ציר $\hat{\theta}$ לא פועל שום כוח, ולכן שקול הכוחות בציר זה הוא 0.

$$\sum F_\theta = ma_\theta$$

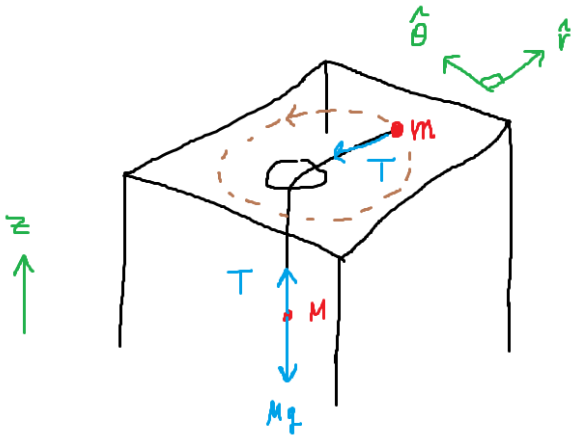
$$0 = m(2\dot{r}\omega + r\ddot{\theta})$$

$$2\dot{r}\omega + r\ddot{\theta} = 0$$

כעת, עבור M נקבע את ציר z, העולה למעלה מכיוון השולחן. בציר זה פועלים עליו המתיחות (T) וMg למטה.

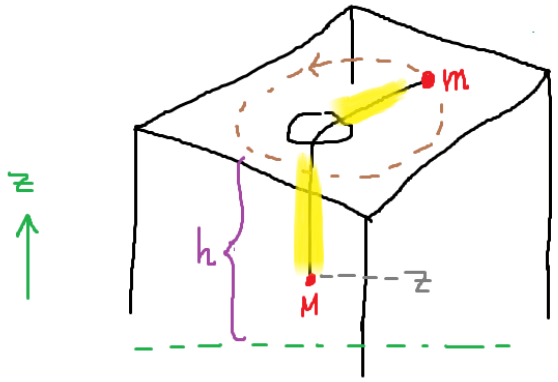
$$\sum F_z = Ma_z$$

$$T - Mg = M\ddot{z}$$



איור 3.21 : תרשים כוחות של הבעיה

יש לנו בסה"כ ארבעה נעלמים (T, z, θ, r) אך שלוש משוואות! נשתמש באילוץ.
האילוץ שלנו יהיה העובדה שהחוט קבוע.



איור 3.22 : המחשה של האילוץ

נקבע את ראשית ציר ה z את מיקום המסה M ברגע $t=0$. כעת החוט ניתן ל"מקטוע" ל2 מקטעים : האחד שנופל מהשולחן (ואורכו $h-z$, עבור h אורך החוט ההתחלתי מתחת לשולחן) והחוט שעל השולחן, שהוא r! בסה"כ :

$$h - z + r = \ell$$

נגזור פעמיים ונקבל :

$$-\ddot{z} + \ddot{r} = 0$$

$$\ddot{z} = \ddot{r}$$

מה שמשפיע על האם m תרד או תעלה תלוי ב $\ddot{z}$. נציב את המשוואה הראשונה בשלישית :

$$-m(\ddot{r} - r\omega^2) - Mg = M\ddot{z}$$

נזכור כי $\ddot{r} = \ddot{z}$ ולכן :

$$-m(\ddot{z} - r\omega^2) - Mg = M\ddot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{-Mg + mr\omega^2}{m+M}$$

בזמן $t=0$:

$$\ddot{z}(t=0) = \frac{-Mg + mr\omega_0^2}{m+M}$$

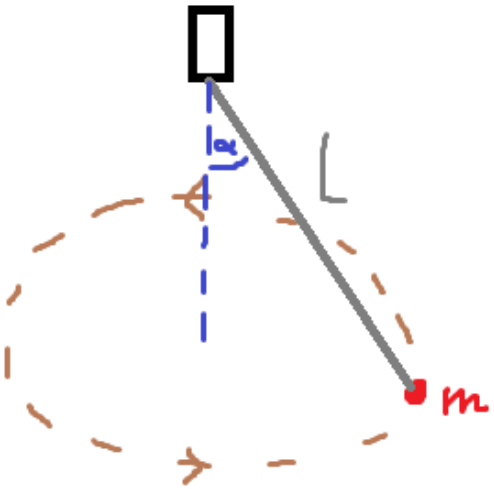
לכן, אם המונה חיובי (ז"א) : $\omega_0^2 > \frac{Mg}{mr}$ אזי המסה M תעלה (וכן להפך, אם היא קטנה אז היא תרד). ובשיויון ממש? המסה M לא תתרומם.

הערה 3.24. תאוצה לא בהכרח חייבת להיות רציפה. לפעמים היא יכולה להשתנות באופן פתאומי ובלתי רציף ע"י כוח. אבל מהירות ומיקום של גוף חייבים להיות רציפים. זאת מכיוון ש :

$$a = \dot{v}$$

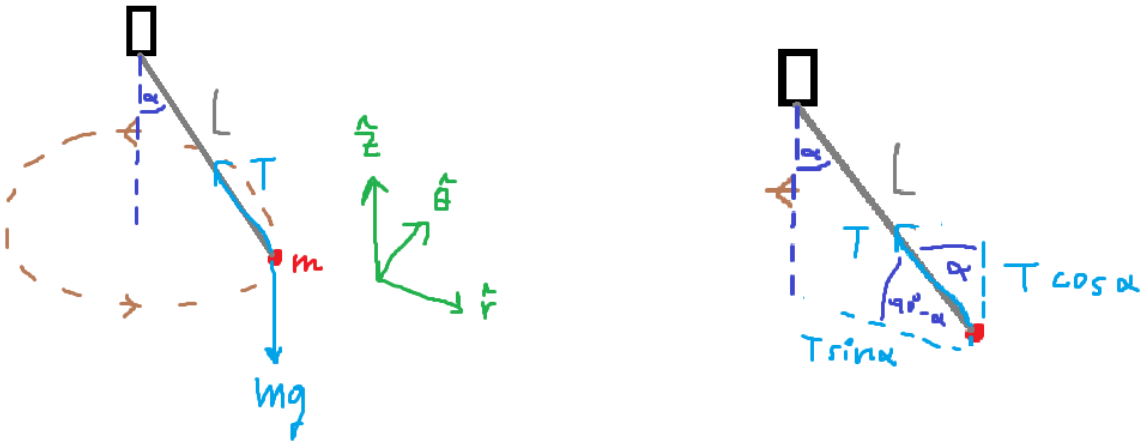
ומכיוון ש v גזירה אז היא גם רציפה (ואותו טיעון תקף גם למיקום)

דוגמה 3.25. מסה m מחוברת למוט בעל אורך L שמחובר למנוע קטן שמסתובב במהירות זוויתית ω. המסה נעה בתנועה מעגלית ברדיוס קבוע. מצאו את α, הזווית שהמוט יוצר עם האנך (כמתואר באיור). למערכת זו קוראים גם מטוטלת קונית (מלשון cone, קונוס בלעז)



איור 3.23 : סרטוט של הבעיה

פתרון. במישור יש תנועה מעגלית, לכן שם נקבע את הקואורדינטות הפולריות. כמו כן נקבע את ציר z להיות הציר המעגלי. הכוחות שפועלים על m הם המתיחות לאורך המוט (בציר $\hat{r}$) ו mg (בציר z).



איור 3.24 : תרשים כוחות ופירוק לרכיבים של המתיחות בצירי $\hat{r}$ ו$\hat{z}$

לאחר פירוק לרכיבים :

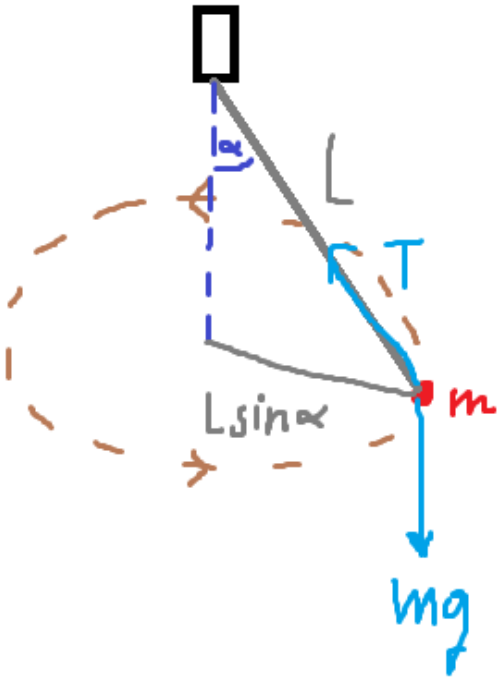
$$\sum F_r = ma_r$$

$$-T\sin\alpha = -mr\omega^2$$

$$T\sin\alpha = m\omega^2 r$$

כמו כן ניתן לשים לב כי בגלל המשולש ישר הזווית שיוצר האנך עם L :

$$r = L\sin\alpha$$



איור 3.25 : מטריגונומטריה, אורך הרדיוס הוא $L\sin\alpha$

ולכן :

$$T\sin\alpha = mL\omega^2\sin\alpha$$
$$T = m\omega^2 L$$

ובכיוון ציר z :

$$\sum F_z = ma_z$$

אבל m מסתובבת במישור מאוזן! הגובה הוא קבוע ולכן $a_z = 0$!

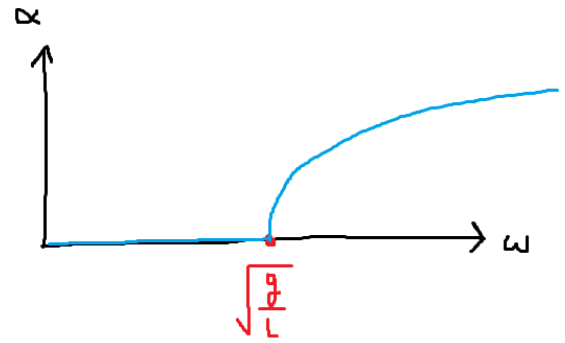
$$T\cos\alpha - mg = 0$$

$$T\cos\alpha = mg$$

נציב את המשוואה הראשונה שקיבלנו קודם ולכן :

$$m\omega^2 L\cos\alpha = mg$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 L}\right)$$

אבל!!! נשים לב כי אם $\frac{g}{\omega^2 L} > 1$ (או כאשר $\omega < \sqrt{\frac{g}{L}}$, זה שקול) הפתרון לא מוגדר!
אז מה קורה במקרה בו אכן $\omega < \sqrt{\frac{g}{L}}$? נשים לב כי בפיתוח המשוואה בציר $\hat{r}$ חילקנו ב $\sin\alpha$, אך אם $\alpha = 0$ זהו פתרון גם כן! במקרה זה המנוע מסתובב אך המסה נשארת במקום (זה פתרון לא יציב)



איור 3.26 : גרף המתאר את α כפונקציה של ω. לפני $\sqrt{\frac{g}{L}}$ הזווית α היא 0.

4 כוחות ומשוואות תנועה

בטבע ישנם ארבעה חוקיים יסודיים : כוח הכבידה, הכוח האלקטרומגנטי (נלמד בחשמל) והכוח החלש והחזק (שנפגוש בסוף התואר, קצת). בטבע שאנחנו נכיר במכניקה יש המון כוחות מסוגים שונים, אך כל כוח שאנו נשתמש בו בקורס זה מורכב מארבעת הכוחות היסודיים (אבל רובם ייצוג של הכוח האלקטרומגנטי).

4.1 גרוויטציה

חוק הכבידה האוניברסלי הוא הכללה של mg. חוק זה ניסח ניוטון ב 1666 יחד עם שלושת חוקי התנועה אשר תוארו בפרק הקודם.

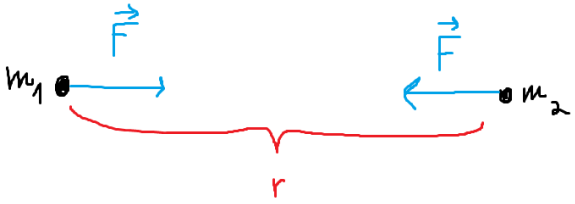
משפט 4.1. תהיינה m_1, m_2 מסות במרחק r. אזי ביניהם פועל כוח $\vec{F}$ (הקרוי כוח הכבידה או הגרוויטציה) המקיים :

$$\vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

כאשר $\hat{r}$ וקטור יחידה בכיוון הווקטור שמחבר בין m_1, m_2. (אין לבלבל עם $\hat{r}$ בקואורדינטות פולריות)
G הוא קבוע ניוטון, הנתון ע"י :

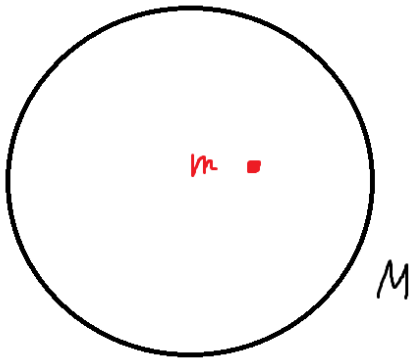
$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$$

ויחידות המידה : $[G] = \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.



איור 4.1 : חוק הכבידה האוניברסלי. כל שני מסות נמשכות זו לזו בכוח $\vec{F}$

שאלה 4.2. מהו כח הכבידה הפועל בין קליפה כדורית (בעלת מסה M) לבין מסה m הנמצאת איפשהו בתוך הקליפה?

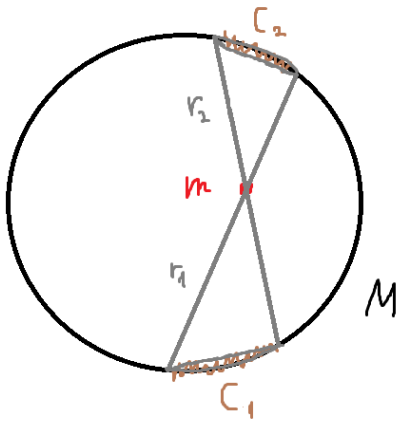


איור 4.2: תרשים של הבעיה

פתרון. נעביר שתי קשתות דרך m , כמתואר באיור. נסמן את החלק התחתון של המיתר בr_1 ואת חלקו העליון ב r_2, ובהתאמה את בסיסי החרוט הנוצרים ב C_1, C_2.

הכוח מכל אלמנט מסה שמורגש מהחלק התחתון קטן פי $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ לפי חוק הכבידה האוניברסלי. מצד שני, החרוטים שנוצרו בעקבות החיתוך של המיתרים דומים, ולכן שטח הפנים של החרוט התחתון גדול פי $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ מהחרוט העליון.

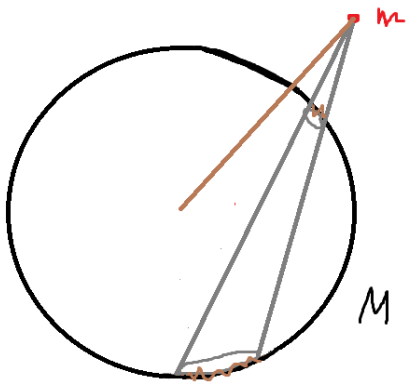
מסקנה: הכוח משני המשולשים זהה ובכיוונים מנוגדים (בגלל שהפרופורציות חייבות להתאזן), ולכן הכוחות בכל מקטע מבטלים זה את זה.



איור 4.3: תרשים של ההוכחה לכך שהכוחות שמפעילים בכל C_1 מבטלים את הכוחות שמפעילים בכל C_2.

ניתן לעשות את טריק זה על מה שלא כיסינו ולכן בסה"כ הגוף לא יזוז כלל.

כעת מה קורה אם הגוף נמצא מבחוץ לקליפה הכדורית?
כאשר m מחוץ לספירה היא תרגיש כוח השווה ל $\frac{gmM}{r^2}$ כאשר r הוא המרחק בין m למרכז הספירה



איור 4.4: המחשה של ההסבר האינטואיטיבי במקרה בו המסה מחוץ לקליפה.

ההסבר האינטואיטיבי הוא שאם נעשה את אותו הטריק נקבל שהחרוטים דומים בזוויות קטנות, ולכן כל מקטע יתרום את אותו הכוח ולכן כל אלמנטי המסה על הקליפה תורמים ביחד כאילו היו כל אלמנטי המסה מרוכזות במרכז הספירה.
ניתן לפתור דרך זו בצורה יותר פורמלית בעזרת אינטגרל, אך לא נעשה זאת כעת.

סיכום 4.3. הכוח הפועל על גוף בעל מסה m מתוך קליפה כדורית בעלת מסה M עם רדיוס R, כאשר m במרחק r מן מרכז הקליפה:

$$F = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{gmM}{r^2} & r > R \end{cases}$$

כוח בין מסות נקודתיות זה דבר נחמד, אך לא נוכל להבין בעזרתו את הכוח שמפעיל כדו"א (למשל), שכן הוא אינו מסה נקודתית בפועל. המטרה שלנו היא למצוא את הכוח בין גוף נקודתי בעל מסה m לבין מסה כדורית בעל מסה M.

טענה 4.4. יהי כדור מלא (כולו מלא במסה) בעלת מסה M ורדיוס R ותהי מסה נקודתית m. כמו כן נניח שההתפלגות המסה סימטרית (אין תלות ב θ, φ). נניח כי המסה m נמצאת במרחק r ממרחק הכדור. אזי כוח הגרוויטציה שמפעיל הכדור על m הינו:

$$F = \begin{cases} \frac{GMm}{r^2} & r > R \\ \frac{GM(r)m}{r^2} & r < R \end{cases}$$

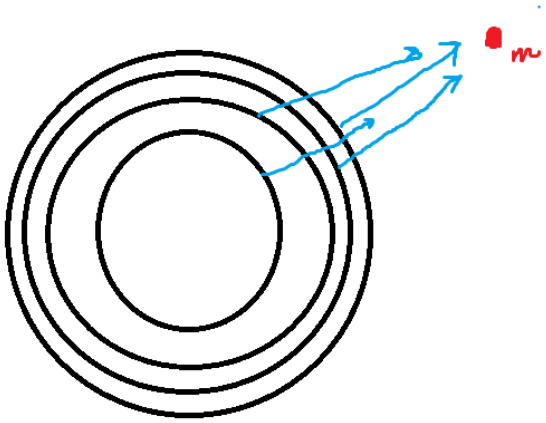
כאשר $M(r)$ היא מסת תת הכדור ברדיוס r.

הוכחה. נחלק למקרים:
אם $r > R$, נחלק את הכדור לקליפות, כאשר כל קליפה בעלת מסה $\mathrm{d}M$ (כיוון שהמסה מתפלגת באופן סימטרי). כוח הכבידה מכל קליפה שקולה לכח נקודתי מראשית הצירים, ולכן הכוח שמפעילה כל קליפה:

$$\mathrm{d}F = \frac{G\mathrm{d}Mm}{r^2}$$

ולכן כלל הכוחות הם הסכום על כל הקליפות, וביחד:

$$F = \frac{G\mathrm{d}Mm}{r^2} = \frac{GMm}{r^2}$$



איור 4.5: אם נחלק את הכדור לקליפות, לפי מה שהראינו מקודם, כל קליפה מפעילה כוח ששקול לכך שהמסה מרוכזת במרכזה.

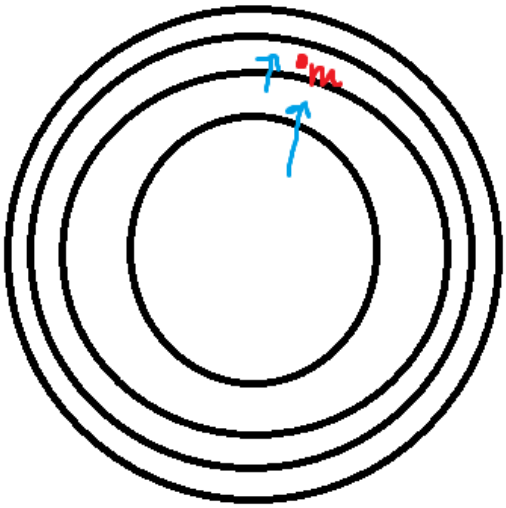
אחרת, אם $r < R$, שוב נחלק את הכדור לקליפות. כל קליפה בה המסה נמצאת, הכוח המופעל הוא 0. לכל קליפה בה המסה לא נמצאת, הכוח הוא:

$$F = \frac{G\mathrm{d}Mm}{r^2}$$

ולכן, לכל קליפה בעלת רדיוס $R_{\mathrm{d}M} > r$ הכוח הוא 0, ולכל קליפה בעלת רדיוס $R_{\mathrm{d}M} < r$ הכוח הוא $\frac{G\mathrm{d}Mm}{r^2}$. הכוח הכולל הוא:

$$F = \sum_{\mathrm{d}M : R_{\mathrm{d}M} < r} \frac{G\mathrm{d}Mm}{r^2} = \frac{G \cdot M(r) \cdot m}{r^2}$$

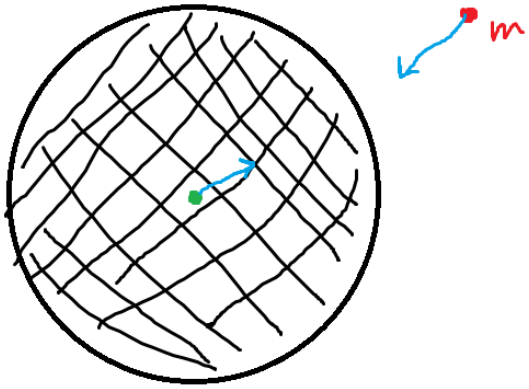
כאשר $M(r)$ הינו המסה של תת הכדור של M, ברדיוס r.



איור 4.6: בכל קליפה בה המסה נמצאת, הכוח הוא 0. לכן רק תת הכדור שרדיוסו r, כך ש m נמצאת על הקצה שלו מפעיל כוח - אשר שוב שקול לכך שכל המסה שלו מרוכזת במרכזה.

■

מסקנה 4.5. הכוח שמסה נקודתית מרגישה עקב גוף כדורי (למשל: כדו"א) שקולה למקרה בו כל המסה של הכדור נמצא במרכז הכדור.



איור 4.7: הכוח הכולל שמפעיל הכדור על המסה m שקול לכך שכל המסה של הכדור מרוכזת במרכזו.

כעת, נניח גוף אשר נמצא בקרבת כדו"א ובמרחק h ממנו ובעל מסה m. הכוח שמורגש עקב כדו"א הוא:

$$F = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2}$$

כאשר R_E רדיוס כדו"א וכן M_E מסת כדו"א. כיוון שהוא נמצא בקרבת כדו"א, h זניח ביחס לרדיוס כדו"א. ולכן:

$$F \simeq m\left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)$$

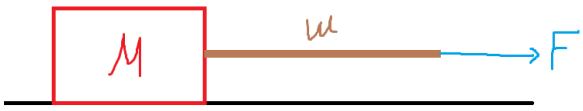
ומסמנים את הגודל שבסוגריים g, ולכן אכן נקבל כי $F = mg$.
בהינתן הנתונים של כדו"א, אכן מקבלים כי $g \approx 9.81 \frac{m}{\sec^2}$.

מסקנה 4.6. בעבור מסות הנמצאות קרוב לכדו"א, הנוסחה $F = mg$ קירוב מעולה. במקרים אחרים צריך להשתמש בחוק הכבידה האוניברסלי.

4.2 מתיחות מתקדמת

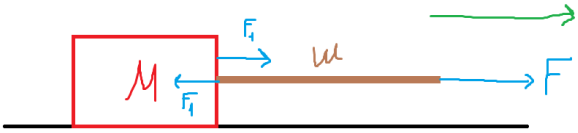
עד כה הנחנו כי כאשר גוף נמתח ע"י חוט, החוט חסר מסה. כעת לא נניח זאת.

דוגמה 4.7. גוף בעל מסה M מחובר לחוט מתוח בעל מסה m. על החוט מופעל מצידו האחר כוח F. עבור איזה כוח נקבל כי המסה M תימשך?



איור 4.8: תרשים הבעיה

פתרון. החוט מפעיל מתיחות על המסה M ולכן לפי החוק השלישי של ניוטון, גם המסה מפעילה כוח מתיחות על החוט.
נסמן את כוח המתיחות ב F_1. נקבע את כיוון הציר ימינה.



איור 4.9: תרשים כוחות של הבעיה. הזזתי את הכוח F_1 שפועל על M בכדי להמחיש את הכיוונים ואיזה חוק פועל על מי

לכן לפי החוק השני של ניוטון:

$$F - F_1 = \sum \vec{F} = ma_m$$

$$F_1 = \sum \vec{F} = Ma_M$$

כמובן החוט והמסה נעים ביחד ויש להם את אותה התאוצה. לכן נקבל:

$$\begin{cases} F - F_1 = ma \\ F_1 = Ma \end{cases}$$

ולכן $a = \frac{F_1}{M}$. מכאן נקבל כי:

$$F - F_1 = \frac{mF_1}{M}$$

$$F = F_1 \frac{m+M}{M}$$

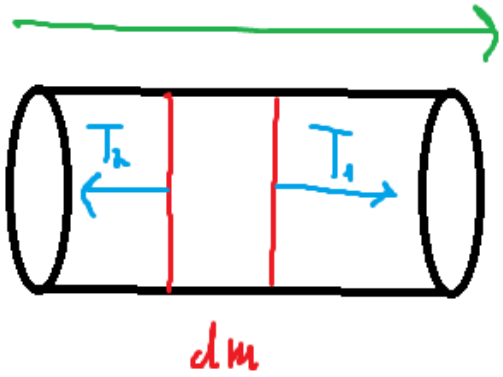
$$F_1 = \frac{M}{m+M} F$$

כלומר, כאשר יש לחוט מסה, לא כל הכוח שמועבר מ F עובר כולו ל M, החוט סופג חלק מן הכוח ולכן יזוז לאט יותר.

הערה 4.8. כאשר החוט חסר מסה, המתיחות לאורכו היא זהה.

הוכחה. ניקח שני קטעים בחוט. המסה בינהם היא $\mathrm{d}m$. הכוח המופעל על המסה הזו היא:

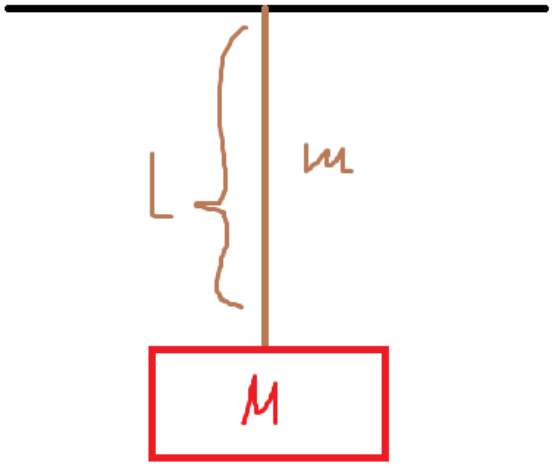
$$T_1 - T_2 = a \cdot \mathrm{d}m$$



איור 4.10: נבחר חתיכה בעלת מסה $\mathrm{d}m$. החלק הימני הנותר של החוט מפעיל מתיחות T_1 ימינה על החתיכה, וכן החלק השמאלי של החוט מפעיל מתיחות T_2 שמאלה על החתיכה.

אבל m אפסית, וכל שכן $\mathrm{d}m$ ולכן $T_1 = T_2$. ■

דוגמה 4.9. על חוט בעל מסה אחידה m ואורך L תלוי גוף בעל מסה M. מצאו את המתיחות (כפונקציה של y, הגובה של החוט מן התחתית) לאורך הגובה של החוט.

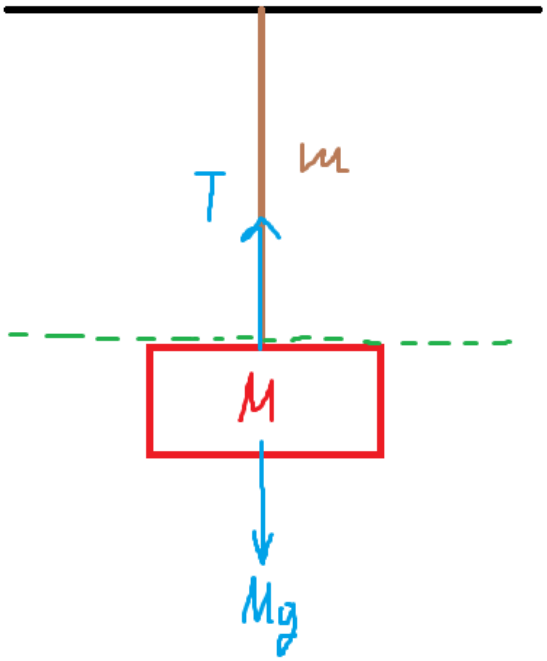


איור 4.11: תרשים של הבעיה

פתרון. כיוון שהמסה אחידה, הצפיפות של המסה בחוט היא $\frac{m}{L}$, ולכן המסה של חתיכה באורך ℓ בחוט הינה $\frac{\ell m}{L}$.
כעת נחלק למקרים. אם $y = 0$, כלומר צריך למצוא את המתיחות על M, קל לוודא כי לפי החוק הראשון של ניוטון:

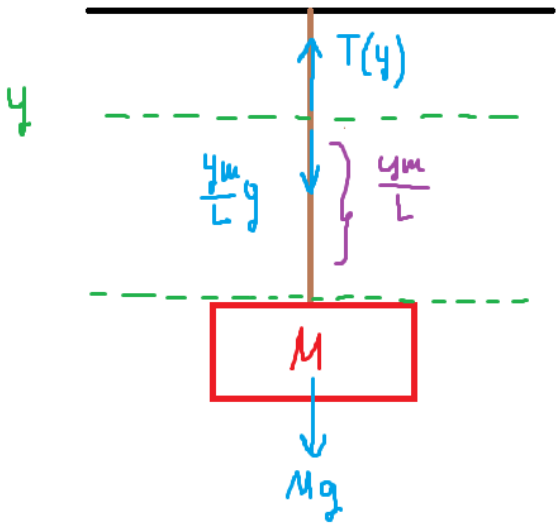
$$T - Mg = 0$$

$$T = Mg$$



איור 4.12: תרשים כוחות עבור $y = 0$, כלומר המתיחות שמרגיש תחתית החוט

עבור $y \neq 0$, נביט בגוף שהוא החוט מהמסה עד y, כמתואר באיור.



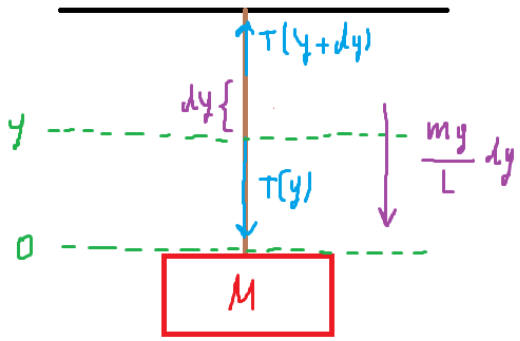
איור 4.13: תרשים כוחות עבור גובה $y \neq 0$.

אפשר לחלק את החוט כעת לשני גופים, החלק העליון והתחתון. על החלק התחתון פועל כוח כבידה $\frac{ym}{L}g$ וכוח כבידה של המסה Mg מלמטה, ועל החלק העליון מתיחות של שאר החוט, אשר נסמנה $T(y)$. לכן באופן דומה, לפי החוק הראשון של ניוטון:

$$T(y) - \left(\frac{ym}{L} + M\right) g = 0$$

$$T(y) = \left(\frac{ym}{L} + M\right) g$$

<u>פתרון נוסף</u>: ניקח חתיכה מהחוט בגודל $\mathrm{d}y$. מלמעלה פועלת על החתיכה כוח מתיחות $T(y + \mathrm{d}y)$ ומלמטה כוח מתיחות של $T(y)$. כמו כן פועל על הגוף מלמטה כוח משיכה שגודלו $g\frac{m\mathrm{d}y}{L}$.



איור 4.14: תרשים של ההוכחה לעיל. הפעם לא נחלק את המערכת לשניים, אלא נביט בחתיכה אינפיניטסימלית מן החוט.

לכן לפי החוק הראשון של ניוטון:

$$T(y + \mathrm{d}y) - T(y) - \frac{mg}{L}\mathrm{d}y = 0$$

נסדר ונקבל:

$$\frac{T(y + \mathrm{d}y) - T(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{mg}{L}$$

עבור $\mathrm{d}y \to 0$ זוהי הנגזרת של T ולכן:

$$T'(y) = \frac{mg}{L}$$

ולכן:

$$T(y) = \frac{mg}{L}y + C$$

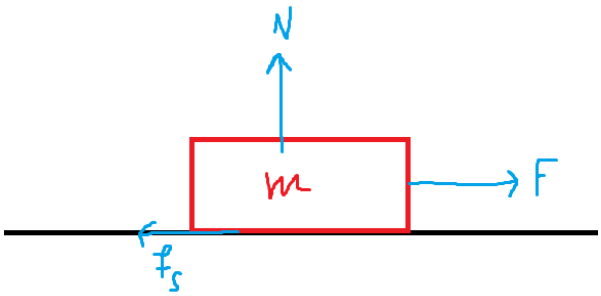
אבל כאשר $y = 0$, כוח המתיחות כולו Mg, כפי שהסברתי למעלה, ולכן בסה"כ:

$$T(y) = \left(\frac{my}{L} + M\right) g$$

4.3 כוח החיכוך

4.3.1 כוח חיכוך סטטי

אם תנסו להפעיל כוח קטן על שולחן (או שתנסו לדמיין את זה אם אין לכם שולחן קרוב), הוא לא יזוז. כמסקנה מכך, אפשר להסיק כי יש כוח "המתנגד" לכוח שניסינו להפעיל. כוח זה משיק לרצפה (כיוון שמתבטל עם הכוח אשר הפעלנו) ולכן נקרא חיכוך.
כיוון שהגוף לא זז, נקרא לכוח החיכוך הזה סטטי אשר נסמנו f_s.



איור 4.15: כאשר מפעילים כוח חלש על מסה אשר נמצאת על משטח הוא לא זז. מכאן אפשר להסיק על כוח השווה בגודלו ל F בכיוון מנוגד אליו ומשיק לרצפה. נהוג לכתוב את f על הרצפה.

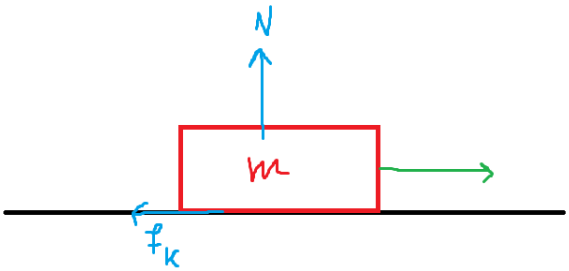
אם נגדיל את הכוח על השולחן, באיזשהו שלב הוא כן יזוז! כלומר יש גבול לכמה כוח חיכוך סטטי יכול להיות מופעל על גוף. לכוח המקסימלי נקרא $f_{s,\max}$.
באופן ניסיוני, גילו כי קיים קשר בין $f_{s,\max}$ לבין הנורמל אשר פועל על הגוף אשר ניסינו להזיז לבין הרצפה. כלומר:

$$f_{s,\max} = \mu_s \cdot N$$

כאשר μ_s נקרא מקדם החיכוך הסטטי. גודלו נקבע לפי תכונות החומר, ו N הנורמל בין הגוף לרצפה.

4.3.2 כוח חיכוך קינטי

כעת בהינתן שהגוף נע, פועל עליו כוח חיכוך קינטי (ומסומן f_k), אשר תפקידו "לעצור" את הגוף בשלב מסויים לאחר שנתנו לו דחיפה.

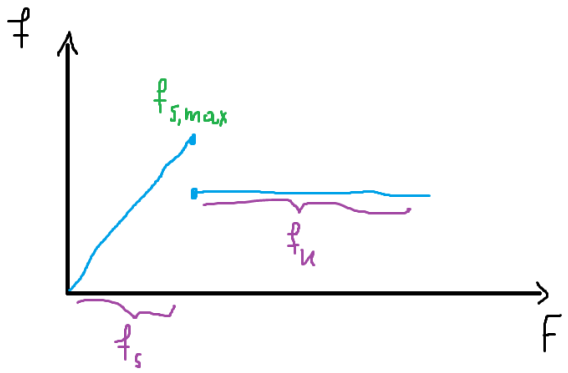


איור 4.16: כאשר גוף נע ללא כוח שמופעל עליו, הוא בסופו של דבר יעצר. מכאן לפי החוק השני של ניוטון נסיק כי בהכרח קיים כוח חיכוך שעוצר את התנועה, אשר כיוונו מנוגד לכיוון התנועה ומשיק לרצפה.

כמו כן גילו כי כוח זה קבוע ושווה ל:

$$f_k = \mu_k \cdot N$$

כאשר N הנורמל של המשטח עליו נע הגוף, וכן μ_k מקדם החיכוך הקינטי. בד"כ $\mu_k \leq \mu_{s,\max}$, כיוון שקל יותר לעצור תנועה מאשר להתחיל אותה.



איור 4.17: גרף המתאר את עוצמת כוח החיכוך כפונקציה של הכוח השקול הפועל על הגוף. שימו לב כי במקטע הראשון (f_s) מצויירת הפונקציה $f(F) = F$.

4.3.3 פתרון בעיות עם חיכוך

הצעה. כדי למצוא את כיוון כוח החיכוך הסטטי, נמצא את הכוח השקול אשר פועל על המערכת ללא החיכוך, ואז החיכוך הסטטי נמצא בניגוד לכיוונו של הכוח השקול.

כתוצאה מן הטריק הזה, נקבל אלגוריתם משוגע איך פותרים בעיות עם חיכוך.

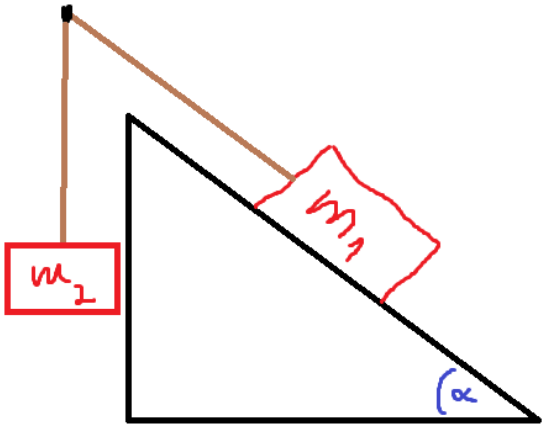
אלגוריתם 2 אלגוריתם לפתירת בעיות עם כוח חיכוך

---

1. נפתור את המערכת ללא חיכוך.
2. נמצא את הכוח השקול של המערכת, ומשם נמצא את כיוון כוח החיכוך.
3. נציב את הכוח החיכוך הסטטי, ואז את המקסימלי ונמצא את $\mu_{s,\max}$ הקריטי, בו המערכת נמצאת בשיווי משקל (חוק ראשון של ניוטון).
4. נציב את כוח החיכוך הקינטי במקום הסטטי ונביע בעזרתו את המבוקש (חוק שני של ניוטון).

דוגמה 4.10. על טריז בעל זווית α נמצאת מסה m_1 המחוברת לגלגלת הנמצאת בקצה הטריז. על הגלגלת נמצאת מתחת מסה נוספת, m_2 אשר תלויה. נתון קבוע החיכוך הקינטי μ_k של המשטח, כמתואר באיור. כמו כן נתון כי $m_1 \sin\alpha > m_2$.

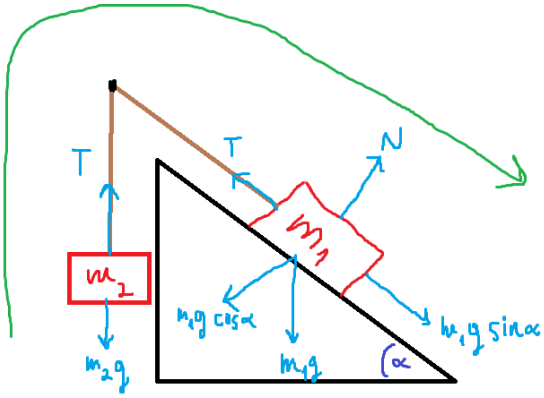
1. מהו התנאי על מנת שתהיה תנועה? מצאו אי שוויון על μ_s.
2. כאשר m_1 נע, מהי תאוצתו?



איור 4.18: תרשים כוחות של הבעיה

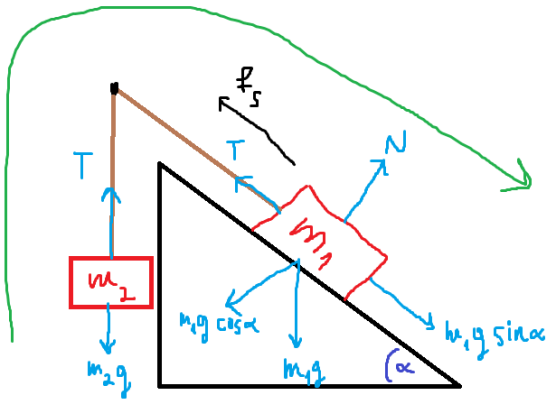
פתרון. אם לא היה חיכוך, ונקבע את כיוון הציר כבתמונה, הכוח השקול היה:

$$\sum \vec{F} = mg\sin\alpha - T + T - m_2 g > 0$$



איור 4.19: תרשים כוחות של הבעיה. הפירוק הזה כבר ידוע בשלב זה (בתקווה) ולכן לא אסביר עליו

לפי הנתון, לכן המערכת תנועה במורד הטריז (עבור m_1) ולמעלה (עבור m_2).
ומכאן, כוח החיכוך הסטטי יהיה במעלה הטריז (זכרו שm_2 לא נעה על משטח ולכן אין עבורה אלמנט חיכוך).



איור 4.20: כעת נוסיף למערכת את רכיב החיכוך

כל עוד $f_s \leq f_{s,\max}$, לא תהיה תנועה. לכן התנאי הקריטי לתחילת התנועה הוא $f_s = f_{s,\max} = \mu_s \cdot N$. ברגע הקריטי של "סף תנועה" הגוף עדיין במנוחה, כלומר שקול הכוחות הוא 0. על m_1, לפי החוק הראשון של ניוטון:

$$0 = \sum F_y = N - m_1 g \cos\alpha$$

$$N = m_1 g \cos\alpha$$

וכן:

$$0 = \sum F_x = m_1 g \sin\alpha - T - f_s$$

וכן על m_2:

$$T - m_2 g = \sum F_y = 0$$

$$T = m_2 g$$

נחליף בין $f_{s,\max}$ לבין f_s ונקבל:

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu_s \cdot N = 0$$

$$mg \sin\alpha - m_2 g - \mu_s \cdot m_1 g \cos\alpha = 0$$

$$\mu_s = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g}{m_1 g \cos\alpha} = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 \cos\alpha}$$

ולכן התנאי הוא:

$$\mu_s \leq \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 \cos\alpha}$$

(כי אם הוא קטן יותר מהקריטי, בוודאי הגוף יזוז, שכן אז הכוח השקול גדול יותר מכוח החיכוך)

כעת בהנחה שהגוף זז, אפשר להחליף את f_s ב f_k. לכן ב m_1:

$$\sum F_y = 0$$

$$N = mg \cos\alpha$$

$$\sum F_x = 0$$

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu_k N = m_1 a$$

ועל m_2:

$$\sum F = 0$$

$$T - m_2 g = m_2 a$$

זוהי אלגברה, נחבר את המשוואות ונקבל כי:

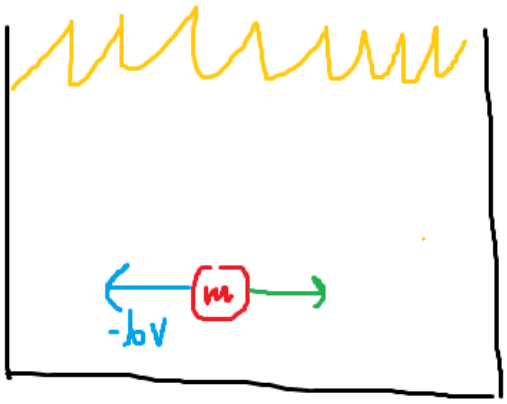
$$a = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g - \mu_k mg \cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

4.4 כוח גרר

הגדרה 4.11. כוח גרר הוא כוח שנובע מחיכוך הגוף הנוזל/גז שמקיף אותו. מתברר כי כוח הגרר פרופורציונלי למהירות הגוף

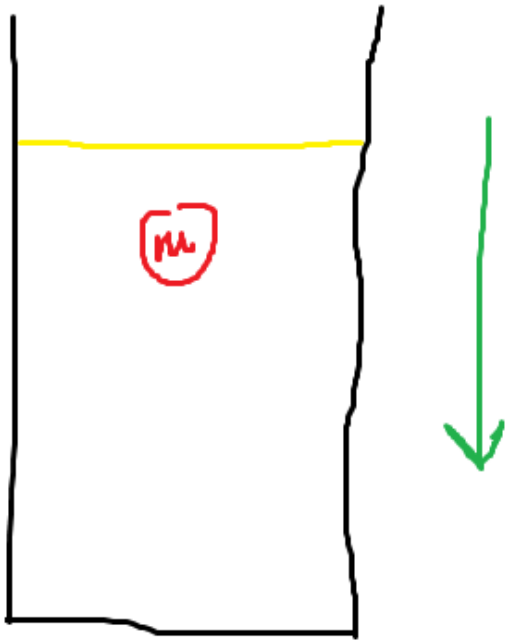
$$\vec{F}_{\text{drag}} = -b\vec{v}$$

כאשר b קבוע התלוי בחומר. שימו לב כי כיוון כוח הגרר נגד כיוון התנועה (נגד כיוון המהירות).



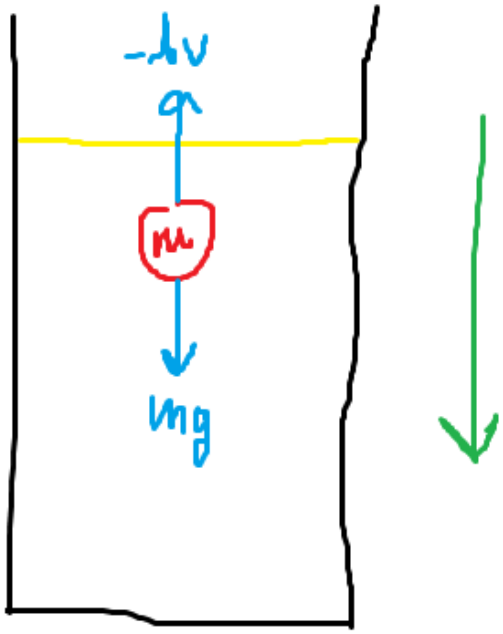
איור 4.21: כוח גרר פועל על גוף אשר נמצא בחומר צמיגי, גודלו פרופורציונלי למהירות וכיוונו נגד כיוון התנועה.

דוגמה 4.12. גוף בעל מסה m נופל לתוך כוס מלאה שמן. נניח כי הגוף מתחיל ליפול במהירות $v_0 = 0$. מצאו את משוואת התנועה.



איור 4.22: תרשים של הבעיה

פתרון. על הגוף פועלים שני כוחות: mg למטה ו $\vec{F}_{\text{drag}} = -bv$ הפועל כלפי מעלה. נבחר את כיוון הציר למטה.



איור 4.23: תרשים כוחות של הבעיה

לכן לפי החוק השני של ניוטון:

$$mg - bv = \sum F = ma$$

ולכן:

$$mg - bv = ma = m\dot{v}$$

קיבלנו מד"ר שבו $v(t)$ נעלם. למשוואה זו קוראים משוואת תנועה. מד"ר זו נקראת גם מד"ר פרידה או פריקה למי שמכיר. השיטה לפתור מד"ר מסוג זה היא לשים את הפונקציה (v) באגף האחד ואת המשתנה (t) באגף השני:

$$mg - bv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$(mg - bv)\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}t = \frac{m}{mg - bv}\mathrm{d}v$$

ולכן:

$$t + C = \int 1\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = \int \frac{m}{mg - bv}\,\mathrm{d}v = -\frac{m}{b}\ln\left(mg - bv\right)$$

ולכן:

$$-\frac{b(t+c)}{m} = \ln(mg - bv)$$

$$e^{-\frac{b(t+c)}{m}} = mg - bv$$

$$v(t) = \frac{mg - e^{-\frac{b(t+c)}{m}}}{b}$$

כעת עלינו למצוא את ערכו של הקבוע! ידוע כי $v(0) = 0$ ולכן ניתן לוודא כי:

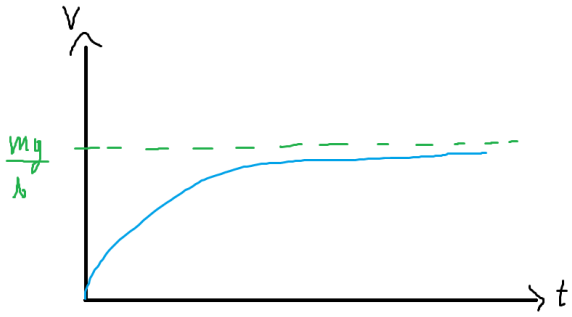
$$v(t) = \frac{mg\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)}{b}$$

כעת, נשים לב כי כאשר $t \to \infty$, מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg\,(1-0)}{b} = \frac{mg}{b}$$

(האקספוננט שואף לאפס) ולכן יגיע אסימפטוטית למהירות קבועה.

שימו לב כי אפשר לוודא זאת בעזרת הקשר שקיבלנו קודם לכן: $mg - bv = m\dot{v}$. שכן המהירות גדלה וגדלה עד אשר שקול הכוחות נהיה 0, כלומר כאשר $a = 0$ ואז נקבל את הנ"ל כמהירות סופית, שכן $a = 0$ ולכן המהירות לא תשתנה.



איור 4.24: גרף של המהירות כפונקציה של הזמן שקיבלנו. כאשר $t \to \infty$ הגוף מגיע למהירות קבועה. זה הגיוני משום שאז אין תאוצה למערכת, וגודל כוח הגרר נהיה שווה בגודלו ל mg.

4.5 תנועה הרמונית

תנועה הרמונית היא תנועה מחזורית, כלומר כאשר פונקציית המיקום מחזורית.

4.5.1 כוח קפיץ

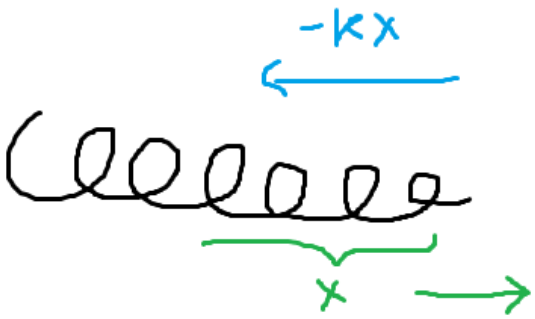
הדוגמה הקלאסית לתנועה הרמונית היא מסה המחוברת לקפיץ, דרכה נסביר את הרעיונות בתנועה הרמונית.

משפט 4.13 (חוק הוק)**.** יהי קפיץ, ונקבע את ראשית הציר בנקודת הריפיון שלו (איפה שהוא נמצא בשיווי משקל). אזי כאשר מותחים אותו לאורך x, הקפיץ מפעיל כוח בכיוון ההפוך לשינוי במיקום הנתון ע"י:

$$F = -kx$$

כאשר k קבוע הקפיץ.

שימו לב שכאשר מכווצים את הקפיץ, התארכותו שלילית ולכן הכוח יהיה לכיוון ההפוך.



איור 4.25: חוק הוק. כאשר מותחים קפיץ באורך x (או לחלופין מכווצים), הקפיץ מפעיל כוח בכיוון מנוגד לכיוון ההתארכות אשר לינארי לאורך.

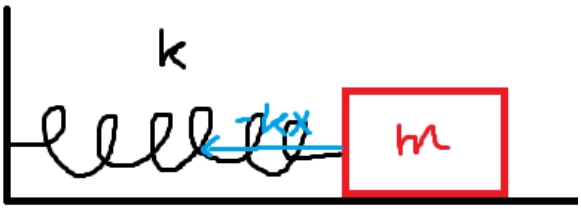
דוגמה 4.14. מסה m קשורה לקפיץ חסר מסה עם קבוע קפיץ k כמתואר באיור. ברגע $t = 0$ מותחים את המסה וכיוצ"ב את הקפיץ. מהו מיקום המסה כפונקציה של הזמן? (אין חיכוך בין המסה לרצפה)



איור 4.26: תרשים של הבעיה

פתרון. נקבע את ראשית הציר $\hat{x}$, בריפיון. לכן לפי החוק השני של ניוטון:

$$-kx = \sum F = ma$$



איור 4.27: תרשים כוחות של הבעיה

$$-kx = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} = \frac{-k}{m}\ddot{x}$$

זוהי משוואת התנועה של המערכת. נסמן:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ולכן:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

הפתרון של המד"ר נתון ע"י שתי דרכי הצגה:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

או:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

שימו לב שאת הקבועים מוצאים ע"י תנאי התחלה.

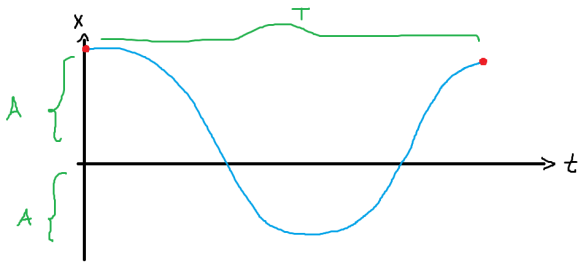
הגדרה 4.15. נביט בגוף הנע ע"י:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

אזי:

- A נקראת האמפליטודה של התנועה (כמה רחוק הגוף יכול להגיע)
- ω נקראת התדירות הזוויתית. (כמה "מהר" הגוף חוזר להתחלה)
- ϕ נקראת הפאזה של התנועה. (באיזה הפרש יחסית לראשית התחלנו)

- T נקרא זמן המחזור של התנועה, הנתון ע"י הזמן החיובי הקטן ביותר שלוקח לגוף לחזור על תנועתו.



איור 4.28: דוגמה לתנועה מחזורית. האמפליטודה A מייצגת את המרחק הגדול ביותר שהגוף יכול לעשות, וזמן המחזור T מייצג כמה זמן לוקח לגוף לחזור להיכן שהיה (מרחק בין שני נקודות סמוכות על הגרף).

איך נמצא את T? נזכור כי כאשר:

$$\omega T = 2\pi$$

הגוף יחזור על התנועה ולכן:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

הגדרה 4.16. תדירות היא מספר המחזורים שגוף עושה בשנייה. כלומר:

$$f = \frac{1}{T}$$

כאשר היחידות הן:

$$[f] = \text{Hz} = \frac{1}{s}$$

טענה 4.17. מתקיים כי:

$$\omega = 2\pi f$$

הערה. למרות שקוראים ל f תדירות ול ω תדירות זוויתית, לעיתים נוטים לקרוא ל ω תדירות גם כן.

דוגמה 4.18. תולים קפיץ חסר מסה בעל קבוע קפיץ k על התקרה וקושרים לתחתית הקפיץ מסה m כמתואר באיור.

1. מהי ההתארכות הקפיץ בשיווי משקל? (מה האורך של הקפיץ כאשר המסה נמצאת בשיווי משקל)
2. מהי תדירות התנועה?
3. מאריכים את הקפיץ בפעמיים הגודל שבסעיף א' ומשחררים את המסה במנוחה. מהי אמפליטודת התנועה?

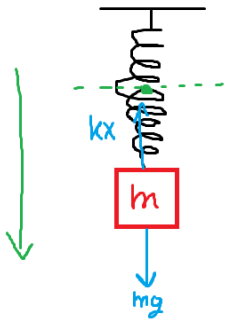


איור 4.29: תרשים של הבעיה

פתרון. תחילה, צריך למצוא את משוואת התנועה. נקבע את הציר האנכי כלפי מטה. לכן לפי החוק השני של ניוטון:

$$mg - kx = \sum F = ma$$

$$mg - kx = m\ddot{x}$$



איור 4.30: תרשים כוחות של הבעיה. הקו הירוק הינו נקודת הריפיון של החוט

זוהי משוואת התנועה, וממנה נרצה לחלץ את התדירות (הזוויתית). נחלק במסה:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + g$$

נקודת שיווי המשקל היא הנקודה בה שקול הכוחות הוא 0, כלומר אם הנחנו את המסה במנוחה בנק' שיווי המשקל, הוא יישאר שם במנוחה. לכן במצב כזה הוא לא זז, ולכן $\ddot{x} = 0$. כלומר:

$$-\frac{k}{m}x + g = 0$$

$$x = \frac{mg}{k}$$

שימו לב כי היה אפשר למצוא את זה בצורה אחרת, ע"י העובדה במצב שיווי משקל:

$$mg = kx$$

$$x = \frac{mg}{k}$$

נקרא לנקודת שיווי המשקל x_q. המטרה שלנו היא להגיע למשוואת אוסילטור הרמוני, כלומר מהצורה:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

ולכן נשנה משתנים:

$$z = x - x_q$$

$$x = z + x_q$$

(סטייה לכיוון נקודת שיווי המשקל) ולכן:

$$\ddot{z} = \ddot{x}$$

שכן x_q נקודה קבועה ולכן:

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}(z + x_q) + g$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}z - \frac{k}{m} \cdot \frac{mg}{k} + g = -\frac{k}{m}z$$

ולכן התדירות הינה:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ולכן:

$$z = A\cos(\omega t + \phi)$$

נחזור להצבה:

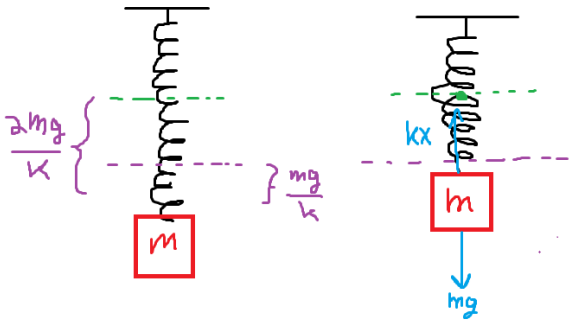
$$x - x_q = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) + x_q = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k}$$

(התדירות הזוויתית שווה גם עבור קפיץ אנכי!).

המשמעות הפיזיקלית של הפתרון היא שהגוף מבצע תנועה הרמונית סביב נקודת שיווי המשקל - כלומר, נקודת הריפיון אינה גם נקודת שיווי המשקל. כעת אם נמתח, ונתחיל את התנועה כאשר $t(0) = \frac{2mg}{k}$, עלינו למצוא את אמפליטודת התנועה.

אבל הוא מבצע תנועה הרמונית סביב נקודת שיווי המשקל! ולכן האמפליטודה היא המרחק בין נקודת הרפיון לבין נקודת שיווי המשקל, כלומר $\frac{mg}{k}$.



איור 4.31: המסה נעה באופן הרמוני סביב נקודת שיווי המשקל. כיוון שמתחנו את הקפיץ לאורך של $\frac{mg}{k}$ יחסית לנקודת שיווי המשקל, זו גם תהיה האמפליטודה (הנק' הנמוכה ביותר)

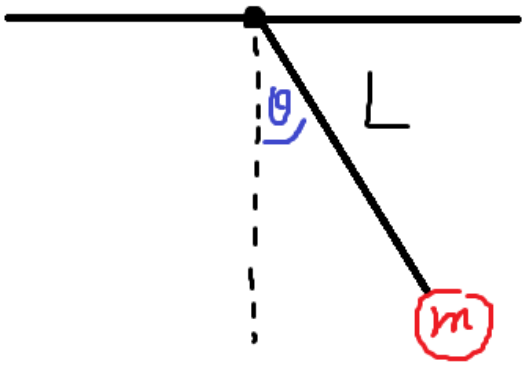
4.5.2 עוד בעיות

כדי לפתור בעיות שנראות לנו כמחזוריות, עלינו להגיע למשוואת תנועה בצורת אוסילטור הרמוני, כלומר למשוואות מן הצורה:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

דוגמה 4.19. מטוטלת היא מערכת הנוצרת ע"י קשירת מסה m לחוט באורך L, כאשר החוט תלוי לתקרה. המסה מתחילה בזווית θ ביחס לאנך, כמתואר באיור.

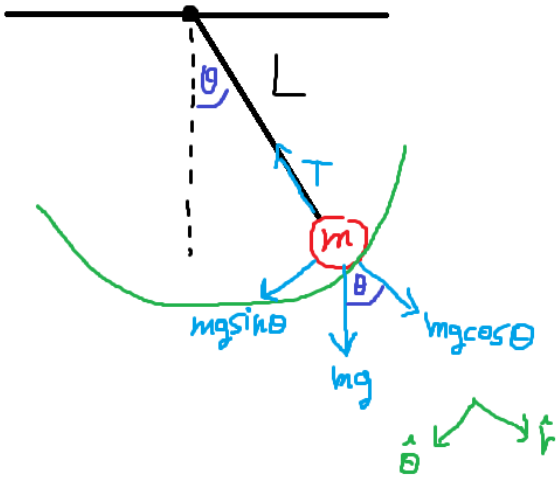
בתנודות (זוויות) קטנות, מהי משוואת התנועה?



איור 4.32: תרשים של הבעיה

פתרון. נראה שהמסה נעה על מעגל (כי אורך החוט קבוע), ולכן נבחר קואורדינטות פולריות. נפרק לרכיבים את mg, ולכן לפי החוק השני של ניוטון, משוואת התנועה בציר $\hat{\theta}$:

$$-g\sin\theta = \sum F_\theta = ma_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = mL\ddot{\theta}$$



איור 4.33: תרשים כוחות של הבעיה. שימו לב כי המסה נעה על מעגל (המסילה הירוקה). תרגיל לקוראים לפרק את mg.

(זכרו כי $r = L$) אבל בזוויות קטנות $\sin\theta \approx \theta$ (פולינום טיילור, כי אותו כמוכם ניתן להזניח) נקבל:

$$-g\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$$

ולכן:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

לכן המסה מבצעת תנועה הרמונית עם תדירות דלעיל.

5 תנע

חוקי ניוטון זה נחמד, אך לעיתים ישנם בעיות מורכבות שלא ניתן לפתור בעזרתם (מד"ר בעייתיות למדי)
בקורס זה נלמד על שלושה חוקי שימור:

- שימור תנע
- שימור אנרגיה
- שימור תנע זוויתי

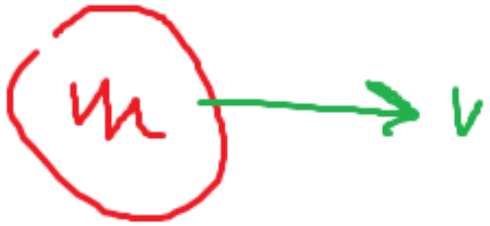
חוק שימור אומר שלא משנה מה קורה במערכת "סגורה", גודל פיזיקלי כלשהו נשמר, ובעזרתו אפשר למצוא דברים בכדי לעקוף את חוקי ניוטון. חוקי שימור מהווים לב ליבה של התורות הפיזיקליות המודרנית כיום, ומהוות אינטואיציה חזקה.

5.1 הגדרת התנע

הגדרה 5.1. תנע של חלקיק בעל מסה m הינו הגודל הוקטורי:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

(כאשר $\vec{v}$ וקטור המהירות של החלקיק)



איור 5.1: תנע

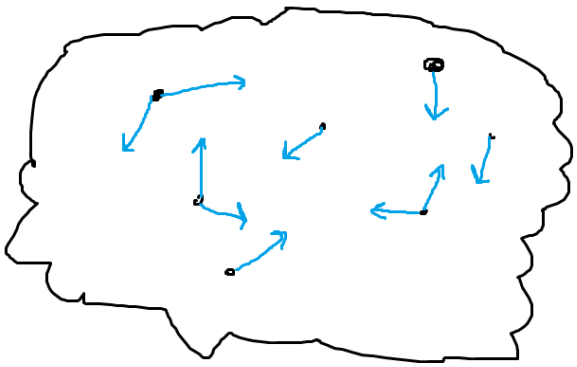
הערה 5.2. עד עכשיו, כאשר דיברנו על חוקי ניוטון אמרנו כי:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

אבל זה נכון בתנאי שהמסה m קבועה, ולכן הוצאנו את m מחוץ לנגזרת. אך הגרסה הנכונה יותר במקרה הכללי, בו המסה לא בהכרח קבועה הינה:

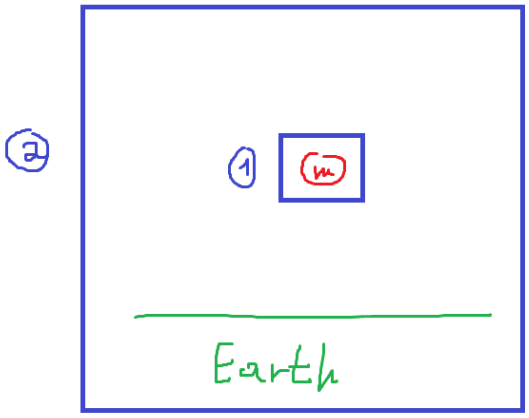
$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

הגדרה 5.3. כוח פנימי הוא כוח שפועל בין גופים המהווים חלק מן המערכת.
כוח חיצוני הוא כוח שמפעיל גוף שאינו חלק מן המערכת.



איור 5.2: החלקיקים מפעילים כוחות בינם לבין עצמם כאשר הם נעים. כל הכוחות הללו הם פנימיים.

הערה. שימו לב כי ההגדרה של "מערכת" היא שרירותית. דוגמה טובה לכך היא מסה וכדו"א. אם נבחר את המערכת להיות המסה, כוח הכבידה הוא כוח חיצוני, ואילו אם נחר את המערכת להיות המסה וגם כדו"א, כוח הכבידה הוא כוח פנימי.



איור 5.3: אם נבחר את המערכת להיות רק $\boxed{1}$, אז כוח המשיכה הוא כוח חיצוני. מנגד אם נבחר את המערכת להיות $\boxed{2}$ אז כוח המשיכה שמפעיל כדו"א על המסה (וכן כוח המשיכה שמפעילה המסה על כדו"א) הוא כוח פנימי.

נסתכל במערכת שמורכבת מהרבה חלקיקים (נניח n). על כל חלקיק:

$$\sum \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$$

(משוואה פר חלקיק)
נסכום את כל הכוחות השקולים על כל חלקיק. לכן:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$$

אבל $\sum \vec{F}_i$ הוא הכוח השקול ששקול לכל הכוחות שפועלים על המערכת. נקרא לוקטור זה $\sum \vec{F}$. לכן:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \right)}_{=\vec{p}_{\text{total}}}$$

אפשר להחליף את אגף שמאל ב:

$$\sum \vec{F}_{\text{extirior}}$$

סכום כל הכוחות החיצוניים על המערכת, שכן בגלל החוק השלישי של ניוטון, כל הכוחות הפנימיים מתבטלים בזוגיות (הגופים החיצוניים לא חלק מן המערכת).
ולכן:

$$\sum \vec{F}_{\text{extirior}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{total}}}{\mathrm{d}t}$$

מכאן ניתן להסיק כי אם המערכת סגורה (כלומר אין עליה כוחות חיצוניים), נקבל כי:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{total}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

ולכן:

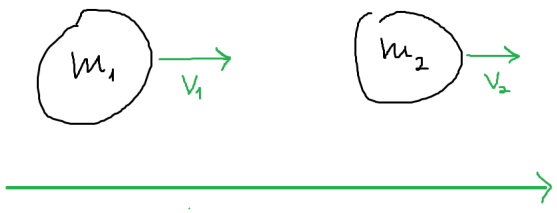
$$\vec{p}_{\text{total}} = C$$

ננסח את החוק החשוב הזה כמשפט:

משפט 5.4 (חוק שימור התנע)**.** במערכת סגורה (אין כוחות חיצוניים) עם n חלקיקים, מתקיים כי:

$$\vec{p}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p} = C$$

דוגמה 5.5. שני כדורים נעים בריק במהירות v_1, v_2 בהתאמה. הכדור הראשון מתנגש בשני, כך שלאחר ההתנגשות הם נדבקים ונהיים גוף אחד. (להתנגשות כזו קוראים התנגשות פלסטית) מהי מהירותם המשותפת אחרי ההתנגשות?



איור 5.4 : המחשה של הבעיה

פתרון. אין כוחות חיצוניים, ולכן התנע נשמר. לכן :

$$\vec{p}_{\text{before total}} = \vec{p}_{\text{after total}}$$

לכן :

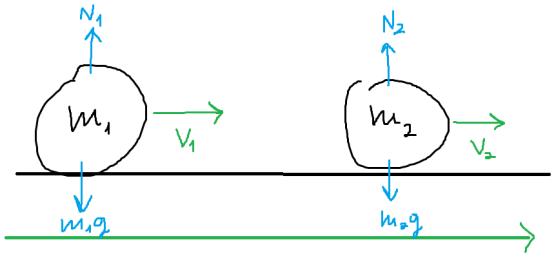
$$\underbrace{m_1 v_1 \hat{x} + m_2 v_2 \hat{x}}_{\text{before}} = \underbrace{(m_1 + m_2) u \, \hat{x}}_{\text{after}}$$

נפתור ונמצא כי :

$$\hat{u} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \hat{x}$$

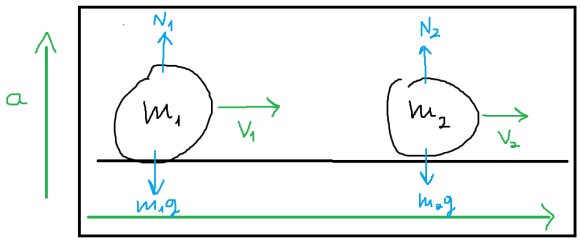
דוגמה 5.6. כעת נניח כי הגופים ממקודם נמצאים על משטח בכדו"א. האם עדיין התנע נשמר?

פתרון. נביט במערכת הכוללת את שני הגופים בלבד. הכוחות החיצוניים הפועלים הם $m_1 g, m_2 g$ (כוחות כבידה) וN_1, N_2 (נורמלים) אך הם מבטלים זה את זה ולכן עדיין סכום הכוחות החיצוניים הוא 0.



איור 5.5 : תרשים של הבעיה. סכום הכוחות החיצוניים בציר $\hat{y}$ הוא 0 ולכן עדיין יש שימור תנע, ולכן נקבל את אותה התוצאה כמו מקודם.

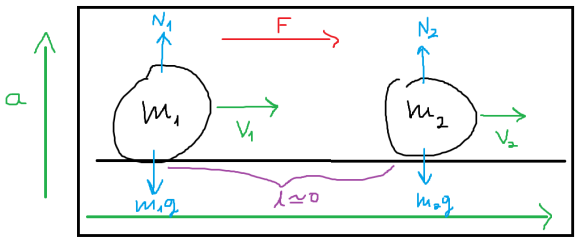
דוגמה 5.7. כעת נשים את המערכת במעלית שנעה למעלה בציר $\hat{y}$. המעלית מאיצה כלפי מעלה במהירות a. האם התנע עדיין נשמר?



איור 5.6 : תרשים של הבעיה. כעת למסות יש תאוצה.

פתרון. כעת הנורמלים גדולים יותר מכוחות הכבידה, כדי לאזן את תאוצת המעלית. ולכן סכום הכוחות החיצוניים אינו 0, שהרי $N_1 - m_1 g = m_1 a > 0$ (ובאופן דומה גם m_2).
אבל בציר $\hat{x}$ יש שימור תנע, שכן חוק שימור התנע הוא חוק וקטורי!
(בציר $\hat{x}$ אין כוחות חיצוניים, ולכן שוב נקבל את אותה התוצאה).

דוגמה 5.8. כעת נמשיך לסבך לכם את החיים ונוסיף כוח נוסף בציר x (גרר/רוח).
כמו"כ, נשנה את השאלה כך שהמרחק בין הגופים מאוד קטן, כלומר הם רגע לפני התנגשות.
מה תהיה מהירות הגוף הכולל מיד לאחר ההתנגשות?



איור 5.7 : כעת מופעל כוח גרר על המסות, ונשים את המסות קרובות זו לזו

פתרון. במבט ראשון, נראה שאין שימור תנע שכן יש כוח חיצוני שפועל בכיוון $\hat{x}$.
אך למעשה :

$$\sum \vec{F}_{\text{extirior}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{total}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{extirior}} \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_{\text{total}}$$

נאסכם ונקבל :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{\text{extirior}} \, \mathrm{d}t = \underset{t_1,t_2}{\Delta} \vec{p}_{\text{total}}$$

(כאשר t_1, t_2 רגעים מאוד סמוכים לפני ואחרי ההתנגשות) אבל כיוון שמשך ההתנגשות שואף לאפס, נקבל כי :

$$\underset{t_1,t_2}{\Delta} \vec{p}_{\text{total}} \to 0$$

ולכן אכן יש שימור תנע.

מסקנה 5.9. כיוון שמבחינתנו זמן התנגשות הוא אפסי, תמיד מתקיים שימור תנע (גם במערכות שאינן סגורות)

כמסקנה מן התרגיל הקודם :

הגדרה 5.10. מתקף הוא הגודל הפיזיקלי הנתון ע"י :

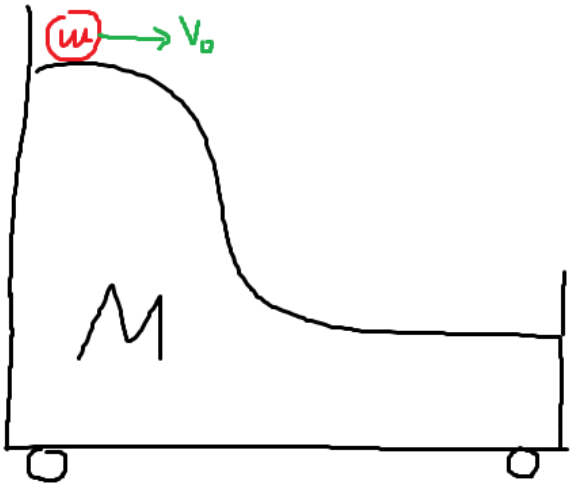
$$J_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} F \, \mathrm{d}t$$

כאשר t_1, t_2 זמנים.

מסקנה 5.11. לכל זמנים t_1, t_2 מתקיים :

$$J_{t_1,t_2} = \underset{t_1,t_2}{\Delta} \vec{p}$$

דוגמה 5.12. כדור בעל מסה m נופל במסלול שבתוך עגלה עם מסה M, ונדבק בסוף המסלול לעגלה. מהי המהירות הסופית של העגלה? (אין חיכוך בין העגלה לרצפה אך כן בין העגלה לכדור, העגלה מתחילה במנוחה)



איור 5.8 : תרשים של הבעיה

פתרון. כאשר הכדור מתחיל לזוז, הוא מפעיל כוח על העגלה ולכן היא מתחילה לזוז בכיוון ההפוך.
כיוון שכל רגע הוא נקודתי, יש שימור תנע במערכת הכוללת את העגלה והכדור בהתחלה לבין הסוף בציר $\hat{x}$.(כוח הנורמל והחיכוך הם פנימיים!) בציר $\hat{y}$ זה לא נכון (כוח הכבידה), אך זה לא משנה לשאלה.
בזמן $t = 0$, כשהכדור מתחיל ליפול :

$$p_{\text{start}} = mv_0$$

ובזמן $t = T$ כשהכדור נדבק לעגלה :

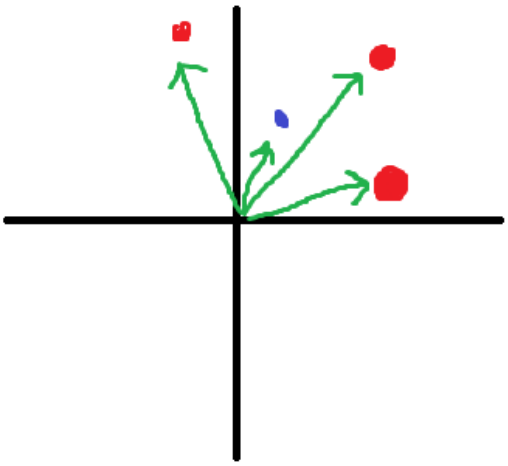
$$p_{\text{end}} = (m + M)u$$

ולכן :

$$u = \frac{mv_0}{m + M}$$

5.2 מרכז המסה

הרעיון של מרכז המסה הוא וקטור המיקום של המסה ה"אמצעית". במערכת פיזיקלית מספר מסות, ואנחנו מעוניינים בסוג של ממוצע המסות אשר מתחשב בגודלם. אם יש שני גופים, האחד עם מסה גדולה והאחרת קטנה, נצפה שמרכז המסה יהיה בכיוון המסה הגדולה יותר.

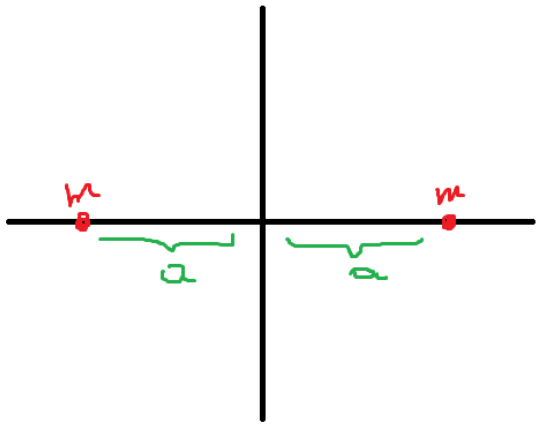


איור 5.9 : מרכז מסה מהווה ממוצע של מיקומי המסות במערכת, בהתחשב במסות הגדולות יותר. באיור רואים כי מרכז המסה (כחול) נמצא יותר קרוב אל המסות הגדולות יותר מאשר הקטנות.

הגדרה 5.13. יהיו $m_1, \ldots, m_n$ מסות עם מיקומים $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_2(t)$בהתאמה. מיקום מרכז המסה מוגדר להיות:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

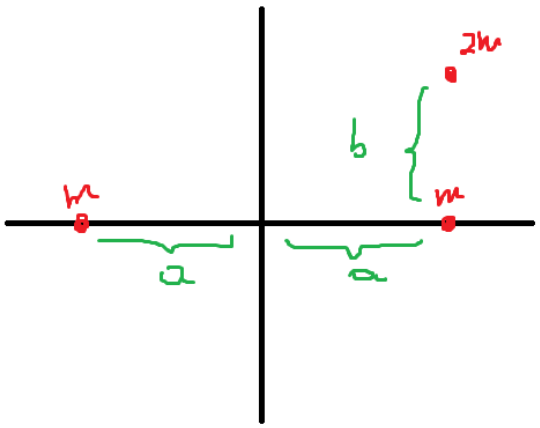
דוגמה 5.14. שני מסות שוות נמצאות במרחק שווה a מהראשית. איפה נמצאת מרכז המסה?



איור 5.10: תרשים של הבעיה

פתרון. בראשית. תרגיל לבית!

דוגמה 5.15. נוסיף לבעיה עוד גוף בעל מסה $2m$ אשר נמצא במרחק אופקי a מהראשית ובמרחק אנכי b. מהו מרכז המסה?



איור 5.11: תרשים של הבעיה

פתרון. נחשב:

$$R_{\text{cm}} = \frac{m \cdot a\hat{x} + m \cdot (-a\hat{x}) + 2m \cdot (a\hat{x} + b\hat{y})}{4m} = \frac{1}{2}(a\hat{x} + b\hat{y})$$

למה הרעיון של מרכז מסה מעניין אותנו? נזכור כי הראינו:

$$\vec{F}_{\text{extirior}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}_{\text{total}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i\right)$$

אבל:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

ולכן:

$$\vec{R}_{\text{cm}} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

נגזור:

$$\dot{\vec{R}}_{\text{cm}} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i$$

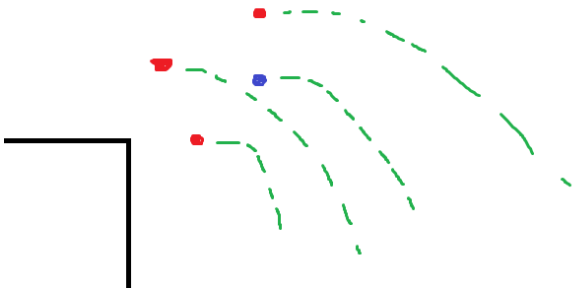
אפשר להציב:

$$\vec{F}_{\text{extirior}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{R}}_{\text{cm}} \sum_{i=1}^{n} m_i}{\mathrm{d}t} = \ddot{\vec{R}}_{\text{cm}} M$$

כאשר M שווה לסכום כל המסות.

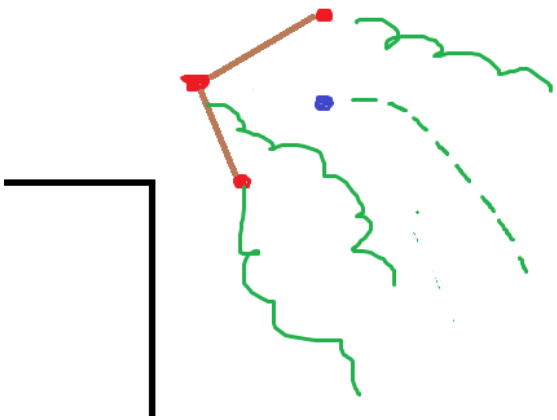
מסקנה 5.16. מרכז המסה של המערכת נע בהתאם לחוק השני של ניוטון, כאילו כל מסות המערכת מרוכזת בנקודה זו, ושקול הכוחות עליה הוא שקול הכוחות החיצוניים.

דוגמה 5.17. זורקים שלושה כדורים מבניין, כל כדור נע במהירות v_i, בהתאם לכוח שמופעל עליו. מרכז המסה של שלושת הכדורים ינוע כאילו מסת כל המערכת מרוכזת בו, ותופעל עליו כוח חיצוני של $\sum m\vec{g}$.



איור 5.12: הכוח החיצוני היחיד הפועל על שלושת המסות האדומות הוא כוח הכבידה. לכן, מרכז המסה יבצע תנועה דומה כמו יתר הגופים, בהשפעת כוח הכבידה. (פרבולית)

דוגמה 5.18. כעת את שלושת הכדורים אנחנו מחברים לחוט. הם יבצעו תנועה יותר מסובכת מפרבולה, אבל מרכז המסה עדיין ינוע בפרבולה! (כוחות המתיחות הם פנימיים)



איור 5.13: שלושת המסות קשורות כעת לחוט. לכן כוחות המתיחות יסבכו מאוד את תנועת המערכת, אך מכיוון שכוחות המתיחות פנימיים - מרכז המסה לא נע בהשפעתם וינוע כמו מקודם, בהשפעת כוח הכבידה בלבד.

מסקנה 5.19. אם אין כוחות חיצוניים על המערכת, מרכז המסה נע במהירות קבועה:

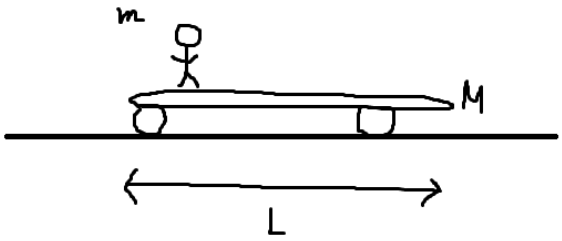
$$\ddot{\vec{R}}_{\text{cm}} = 0$$

הגדרה 5.20. מהירות מרכז המסה מוגדרת על ידי:

$$\vec{V}_{\text{cm}} = \dot{\vec{R}}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum m_i}$$

אם אין כוחות חיצוניים על המערכת, מהירות מרכז המסה קבועה!

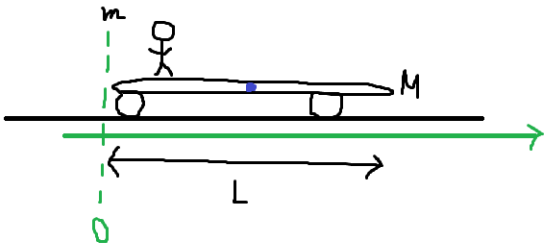
דוגמה 5.21. ילד בעל מסה m עומד על סקייטבורד באורך L ומסה M, ואז מתחיל ללכת ימינה עד שמגיע לקצה הסקייטבורד. איזה מרחק התקדם הסקייטבורד, ולאיזה כיוון? (אין חיכוך בין הסקייטבורד לרצפה)



איור 5.14: תרשים של הבעיה

פתרון. יש חיכוך בין הילד לסקייטבורד, שאלמלא כך לא יכול הילד ללכת על הסקייטבורד ולכן הסקייטבורד ינוע שמאלה. אך היא לא משנה לחישוב שכן היא פנימית.

אין כוח חיצוני בציר ה x, לכן מהירות המ"מ (מרכז המסה) קבועה. היות ובתחילה המערכת הייתה במנוחה, מרכז המסה לא יזוז (מהירותו קבועה 0). נגדיר את כיוון הציר ימינה אשר ראשיתו בילד.



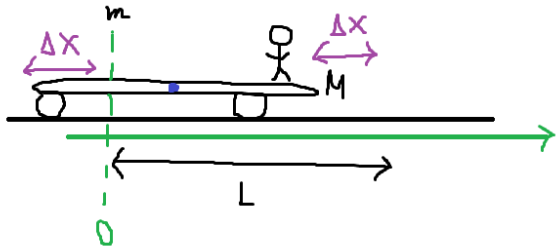
איור 5.15: תרשים כוחות של הבעיה ברגע $t = 0$

נניח כי המסה של הסקייטבורד אחידה (הנחה סבירה). לכן:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2}}{m + M} = \frac{ML/2}{m + M}$$

כשהילד מגיע לסוף הסקייטבורד, נסמן את המרחק שהסקייטבורד עבר ב Δx, לכן הילד נמצא ב $L - \Delta x$. לכן:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m(L - \Delta x) + M\left(\frac{L}{2} - \Delta x\right)}{m + M}$$



איור 5.16 : סרטוט הבעיה ברגע סיום התנועה. הסקייטבורד נע אחורה Δx מרחק, ולכן נקודת הסיום של הילד היא $L-\Delta x$

אבל מרכז המסה קבוע ולכן גם בהתחלה וגם בסוף הם שווים :

$$\frac{m(L-\Delta x)+M\left(\frac{L}{2}-\Delta x\right)}{m+M}=\frac{ML/2}{m+M}$$

$$ML/2=mL-m\Delta x+\frac{ML}{2}-M\Delta x$$

$$\Delta x=\frac{mL}{M+M}$$

דוגמה 5.22. שתי מסות מחוברות ע"י קפיץ עם קבוע קפיץ k. נתון כי אורך הרפוי של הקפיץ הוא L_0 נותנים למסה m_1 מהירות התחלתית v_0 ימינה. (m_2 במנוחה)
מצאו את משוואת התנועה עבור מיקום המסה m_1 ופתרו אותה.



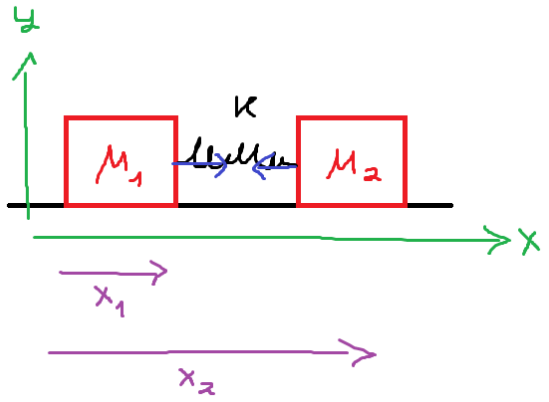
איור 5.17 : תרשים של הבעיה

פתרון. גם כאן אין כוחות חיצוניים (בציר x הוא ציר התנועה), לכן מהירות מרכז המסה קבועה ושווה :

$$v_{\text{cm}}=\frac{m_1v_0+m_2\cdot 0}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_0}{m_1+m_2}$$

משוואת הכוחות על m_1 :

$$k(x_2-x_1-L_0)=\sum\vec{F}=m_1\ddot{x}_1$$



איור 5.18: תרשים כוחות של הבעיה

(תמיד בסימון כוחות על קפיץ, כוח הקפיץ יכוון לעבר הקפיץ – או בניגוד לכיוון התנועה של הגוף. במקרה הזה, שימו לב כי x_1 בצד שמאל מופיע כשלילי ולכן לא נוסיף את המינוס)

משוואת הכוחות על m_2:

$$-k(x_2 - x_1 - L_0) = \sum \vec{F} = m_2\ddot{x}_2$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב m_2 ואת השנייה ב m_1:

$$\begin{cases} km_2(x_2 - x_1 - L_0) = m_1m_2\ddot{x}_1 \\ -km_1(x_2 - x_1 - L_0) = m_1m_2\ddot{x}_2 \end{cases}$$

נחסר:

$$km_2(x_2 - x_1 - L_0) + km_1(x_2 - x_1 - L_0) = m_1m_2\ddot{x}_1 - m_1m_2\ddot{x}_2$$

נסמן $u = x_1 - x_2$. לכן:

$$(m_1 + m_2)ku - m_2kL_0 - m_1kL_0 = -m_1m_2\ddot{u}$$

$$\ddot{u} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}ku + \frac{(m_1 + m_2)kL_0}{m_1m_2}$$

וזוהי משוואת התנועה. היא מאוד דומה למשוואת אוסילטור (או מתנד) הרמוני, עד כדי כוח קבוע - וכן התדירות היא:

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}k$$

נקודת שיווי המשקל היא כאשר $\ddot{u} = 0$, כלומר כאשר:

$$-\frac{\cancel{m_1 + m_2}}{\cancel{m_1m_2}}ku + \frac{\cancel{(m_1 + m_2)}kL_0}{\cancel{m_1m_2}} = 0$$

$$u_q = L_0$$

ולכן:

$$x_1 - x_2 = u = A\cos(\omega t + \phi) + L_0$$

שימו לב שקיבלנו כי:

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}k$$

בהשוואה לתנועה הרמונית פשוטה, בה $\omega^2 = k/m$. אפשר לבחור שהמסה האפקטיבית של המערכת היא:

$$\frac{1}{m_{\text{effetive}}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

זו המסה של המערכת בעלת מסה אחת שהייתה מתנדנדת באותה התדירות. מסה זו גם נקראת המסה המצומצמת.

נשתמש בעובדה כי שמרכז המסה נע במהירות קבועה:

$$x_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}(0) + v_{\text{cm}} \cdot t$$

נקבע את ראשית ציר ה x בנקודת ההתחלה של m_1:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 L_0}{m_1 + m_2}$$

ולכן:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 L_0}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_2 L_0 + m_1 t v_0$$

נשים במערכת משוואות:

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_2 L_0 + m_1 t v_0 \\ x_1 - x_2 = u(t) \end{cases}$$

נפתור ונקבל:

$$x_2 = x_1 + u(t)$$

נציב:

$$m_1 x_1 + m_2 (x_1 + u(t)) = m_2 L_0 + m_1 v_0 t$$
$$x_1(t) = \frac{-m_2 u(t)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 L_0 + m_1 v_0 t}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 (L_0 + A\cos(\omega t + \phi))}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 L_0 + m_1 v_0 t}{m_1 + m_2}$$

נפשט:

$$= -\frac{m_2 A \cos(\omega t + \phi)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_0 t}{m_1 + m_2}$$

כעת נמצא את $x_2(t)$:

$$x_2(t) = x_1(t) + u(t) = -\frac{m_2 A \cos(\omega t + \phi)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_0 t}{m_1 + m_2} + L_0 + A\cos(\omega t + \phi)$$

כלומר:

$$x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \phi) + L_0 + \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cdot t$$

אפשר למצוא את A, ϕ מתנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = 0 \\ \dot{x}_1(t=0) = v_0 \\ x_2(t=0) = L_0 \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

איך ייתכן שיש לנו 4 תנאי התחלה ורק 2 קבועים? למעשה כבר השתמשנו בהם במהלך הפתרון, כאשר חישבנו את מהירות המ"מ.

5.3 מערכות עם מסה משתנה

כאשר המסה של הגופים השונים במערכת משתנה עם הזמן, לא ניתן להשתמש בחוק השני של ניוטון בגרסתו הסטנדרטית, שכן החוק הכללי הוא:

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

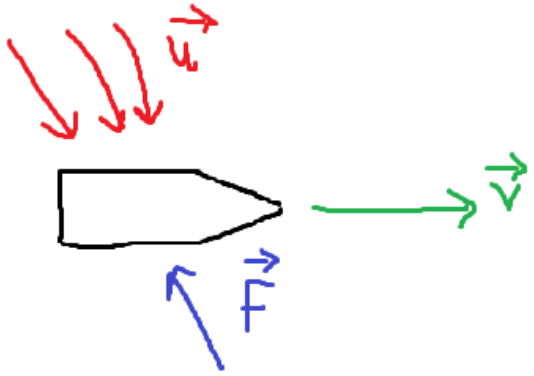
אבל זה נכון רק כאשר המסה קבועה.
בסעיף זה ננתח מערכות בהן המסה לא בהכרח קבועה.

אלגוריתם 3 אלגוריתם לפתרון בעיות עם תנע ומסות משתנות

---

1. הגדרת המסות במערכת.
2. תרשים כוחות (לבדוק אם התנע נשמר במערכת).
3. טבלה (בדיקה של המהסות והמהירויות בזמן t ובזמן $t + \Delta t$).
4. מחשבים את $p(t), p(t + \Delta t)$ ומתוך כך את Δp.
5. מחשבים את $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$

דוגמה 5.23. נתונה חללית שנעה דרך תווך בין כוכבי (אבק), במהירות $\vec{v}$ קבועה. כאשר היא נעה, החללית סופחת את האבק שנע כמתואר בקצב של $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \alpha$, ואשר נע במהירות קבועה u. מצאו את הכוח $\vec{F}$ שיש להפעיל על החללית כדי שתמשיך לנוע במהירות הקבועה $\vec{v}$.
בזמן $t = 0$, מסת החללית היא M_0.



איור 5.19 : תרשים של הבעיה

פתרון. בשאלות כאלה תמיד ננסה את הגישה הדיפרנציאלית, ננתח את המערכת בזמן t ואת המערכת בזמן $t + \Delta t$ - ואז נחשב את ההפרש בתנע, ומשם הכוח.
כדי להשתמש בנוסחה $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ נחשב את אגף ימין בשני זמנים.
נרצה להכניס למערכת את החללית וגם את האבק. אך כיוון שהוא אינסופי, נכניס רק את האבק אשר נדבק לחללית בזמן t למערכת.



איור 5.20 : תרשים של החללית לפני שהתנגשו בה חלקיקי האבק (צד שמאל) ואחרי שהתנגשו (צד ימין). לאחר ההתנגשות, לחללית נוספה עוד מסה.

נביט בזמן t לפני שהאבק פגע בחללית, וב $t + \Delta t$ אחרי, כאשר האבק נדבק למשאית.
התנע בזמן t של המערכת :

$$\vec{p}(t) = M(t)\vec{v} + \Delta m\vec{u}$$

בזמן $t + \mathrm{d}t$:

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) = \underbrace{M(t + \mathrm{d}t)}_{M+\Delta m}\vec{v} = (M(t) + \Delta m)\vec{v}$$

שכן היא נעה באותה המהירות!
כעת :

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = (M(t) + \Delta m)\vec{v} - M(t)\vec{v} + \Delta m\vec{u} = \Delta m(\vec{v} - \vec{u})$$

נחלק ב $\mathrm{d}t$ ולכן :

$$\frac{\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{u})$$

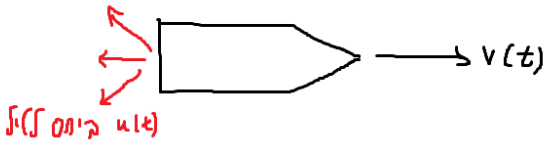
כאשר $\mathrm{d}t \to 0$ זוהי הנגזרת ולכן :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{u})$$

(זכרו כי $\vec{v} - \vec{u}$ קבוע) ולכן :

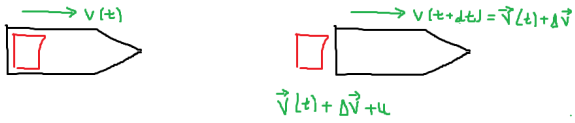
$$\vec{F} = \alpha(\vec{v} - \vec{u})$$

דוגמה 5.24 (משוואת טיל)**.** נסתכל על טיל שנע בצורה אופקית. תוך כדי תנועתו הוא פולט גז שנע במהירות $\vec{u}$ ביחס לטיל. כמו"כ נניח כי קצב איבוד המסה הוא $\frac{dm}{dt} = -\alpha$ (כאשר $\alpha > 0$). מצאו משוואה עבור $v(t)$ על הטיל ופתרוה. (כוח הכבידה זניח), אם נתון ש $v(0) = 0$



איור 5.21 : תרשים של הבעיה

פתרון. נביט בזמן t בו חלק מן הגז נפלט.



איור 5.22 : מצב החללית לפני שהשתחררו חלקיקי הגז (צד שמאל) ואחרי שהשתחררו

התנע של המערכת בזמן t :

$$\vec{p}(t) = M(t) \cdot \vec{v}(t)$$

התנע של המערכת בזמן $t + \Delta t$, לאחר שהגז נפלט :

$$\begin{aligned}
\vec{p}(t + \mathrm{d}t) &= \overbrace{M(t + \Delta t) \cdot (\vec{v}(t) + \Delta\vec{v})}^{\text{rocket}} + \overbrace{\Delta m(\vec{v}(t) + \Delta\vec{v} + \vec{u})}^{\text{gas}} \\
&= (M(t) - \Delta m)(\vec{v}(t) + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v}(t) + \Delta\vec{v} + \vec{u}) \\
&= M(t)\vec{v}(t) + M(t)\Delta\vec{v} - \cancel{\Delta m \cdot \vec{v}(t)} - \cancel{\Delta m\Delta\vec{v}} + \cancel{\Delta m \cdot \vec{v}(t)} + \cancel{\Delta m\Delta\vec{v}} + \Delta m \cdot \vec{u} \\
&= M(t)\vec{v}(t) + M(t)\Delta\vec{v} + \Delta m \cdot \vec{u}
\end{aligned}$$

ולכן :

$$\Delta\vec{p}(t) = M(t)\Delta\vec{v} + \Delta m \cdot \vec{u}$$

נחלק ב Δt :

$$\frac{\Delta\vec{p}(t)}{\Delta t} = \frac{M(t)\Delta\vec{v} + \Delta m \cdot \vec{u}}{\Delta t} = M(t) \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{u}$$

כאשר $\Delta t \to 0$ אזי זוהי הנגזרת :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = M(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}$$

כמו כן אין כוחות חיצוניים, ולכן :

$$\sum \vec{F} = 0$$

כלומר :

$$0 = (M_0 - \alpha t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \alpha u$$

(אפשר להסיק זאת מהנתון). זוהי מד"ר על $v(t)$. נכפיל ב $\mathrm{d}t$:

$$(M_0 - \alpha t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha u$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\alpha u}{M_0 - \alpha t}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v 1\,\mathrm{d}v = \int_0^t \frac{\alpha u}{M_0 - \alpha t}\,\mathrm{d}t$$

(כנתון)

$$v = -u\ln(M_0 - \alpha t)|_0^t = u\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}\right)$$

שימו לב שכאשר $t \to \infty$ אז $v \to \infty$, שזה הגיוני משום חוק שימור המסה, עיקר המהירות מופעלת על הטיל עצמו.

דוגמה 5.25. כעת נניח כי הטיל נופל אנכי.

פתרון. הפיתוח זהה, רק כעת $\sum \vec{F} = -M(t)g\hat{y}$ (כאשר ציר y כלפי מעלה):

$$-M(t)g = M(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \alpha u$$

$$-(M_0 - \alpha t)g = (M_0 - \alpha t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \alpha u$$

הפתרון יחסית זהה ונקבל בסוף:

$$v = u\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \alpha t}\right) - gt$$

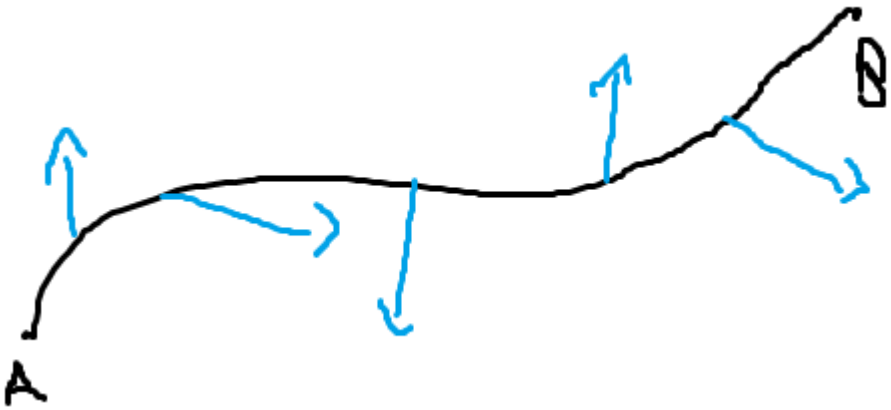
6 עבודה ואנרגיה

6.1 עבודה ומשפט עבודה אנרגיה

הגדרנו את התנע והמתקף, וראינו שיש "חוק שימור", ומכאן מצאנו את החשיבות של תנע.
באופן דומה, אנחנו הולכים לדבר על אנרגיה בגלל חוק שימור האנרגיה שנראה בפרק זה - ומכאן חשיבותו.
לפעמים, לא ניתן להשתמש בחוקי ניוטון בכדי לפתור בעיות מסוימות, ועל כן נסה להשתמש בדרכים אחרות.

יהי גוף שנע בין שתי נקודות A וB. נניח שפועל על הגוף כוח כלשהו במהלך ה"טיול", אך הכוח תלוי במיקום.
דוגמה:

$$\vec{F} = 3xy\hat{x} + 4x^2\hat{y}$$



הגדרה 6.1. יהי $F = P\hat{x} + Q\hat{y}$ שדה כוח (דהיינו כוח שתלוי במיקום). נגדיר את העבודה של הכוח:

$$W = \int_A^B \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$$

שימו לב כי מדובר באינטגרל קווי מסוג שני!
היחידות הן J (ג'אול) והן $N \cdot m$

המשמעות של ההגדרה הזו היא לסכום את ההיטל המשיק ל $\vec{F}$, כאשר $\mathrm{d}\vec{r}$ וקטור בכיוון המשיק:

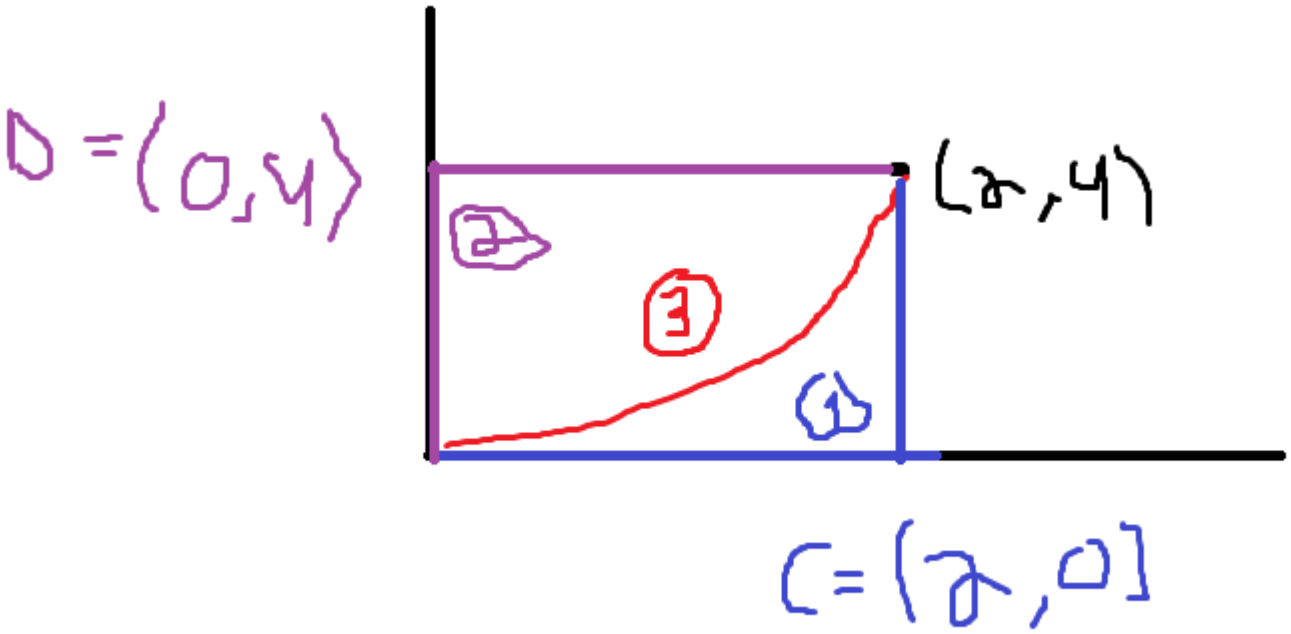
$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F\mathrm{d}r\cos\alpha=F_{\text{tangent}}\mathrm{d}r$$

דוגמה. גוף נע במישור מהנקודה $(0,0)$ לנק' $(2,4)$. עליו פועל הכוח:

$$\vec{F}=(y^2-x^2)\hat{x}+3xy\hat{y}$$

חשבו את את העבודה על הגוף אם:

- הגוף נע על הפרבולה $y=x^2$
- הגוף נע על ציר הy ומשם אל הנק' $(2,4)$
- הגוף נע על ציר הx ומשם אל הנק' $(2,4)$



פתרון. נתחיל ממסלול על ציר ה x.
העבודה:

$$W_1=\int_A^B\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_A^B(F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z})\cdot(\mathrm{d}r_x\hat{x}+\mathrm{d}r_y\hat{y}+\mathrm{d}r_z\hat{z})$$

כיוון ש $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ מאונכים ונורמליים זה לזה, מתקיים:

$$=\int_A^B F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

(זו נוסחה שנכונה באופן כללי ואיתה נעבוד, כעת נתחיל בחישוב)
לאורך מסלול 1, בגלל שאנחנו במישור:

$$=\int_A^B F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y$$

נפריד את האינטגרל לתחום מ $(0,0)\to(2,0)$ ו$(2,0)\to(2,4)$, כאשר נסמן $C=(2,0)$:

$$=\int_A^C F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+\int_C^B F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y$$

במקטע בין $A \to B$ זזים רק בציר x, לכן הרכיב בציר y מתאפס, ובמקטע בין $C \to B$ הרכיב בציר x מתאפס בגלל אותו טיעון. על כן:

$$= \int_A^C (y^2 - x^2)\mathrm{d}x + \int_C^B 3xy\mathrm{d}y$$

אבל במקטע $A \to C$ ערך y תמיד 0! כמו כן במקטע $C \to B$ ערך x תמיד 2! ולכן:

$$= \int_A^C (-x^2)\mathrm{d}x + \int_C^B 6y\mathrm{d}y$$

קיבלנו אינטגרל במשתנה אחד:

$$= \int_0^2 (-x^2)\mathrm{d}x + \int_0^4 6y\mathrm{d}y = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 3y^2\big|_0^4 = 45\frac{1}{3}J$$

כעת עבור מסלול 2, נחלק את המסלול שוב לנקודה D ו$A \to D$,$D \to B$ כאשר $D = (0, 4)$.

$$W_2 = \int_A^D \cancel{F_x\mathrm{d}x} + F_y\mathrm{d}y + \int_D^B F_x\mathrm{d}x + \cancel{F_y\mathrm{d}y} = \int_A^D 3\cancel{y}\mathrm{d}y + \int_D^B (\cancel{y^2}^4 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_0^2 (16 - x^2)\mathrm{d}x = 16x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 32 - \frac{8}{3} = 28\frac{1}{3}J$$

עבור מסלול 3, לא נפריד את המסלול אלא נחשב ישירות:

$$W_3 = \int_A^B F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y = \int_A^B (y^2 - x^2)\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}y$$

יש כאן ערבוב של x, y! אנחנו רוצים להביע את y ע"י x, אך כיוון שאנו הולכים על הפרבולה $y = x^2$, נחליף את y בx^2 ונקבל:

$$\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

ולכן כלל האינטגרל הינו:

$$= \int_0^2 (x^4 - x^2)\mathrm{d}x + 3x \cdot x^2 \cdot 2x\mathrm{d}x = \int_0^2 (7x^4 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}x^5 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 42\frac{2}{15}J$$

קיבלנו עבודה שונה בכל אחד מן המסלולים, אע"פ שהלכנו מאותן שתי נקודות.
כעת, מדוע אנחנו צריכים עבודה?
נמצא קשר בין עבודה לבין גודל שנקרא "אנרגיה קינטית". לפי החוק השני של ניוטון:

$$W = \int_A^B \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$$

זכרו כי $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}t$ לפי נוסחת מיקום-מהירות-זמן. לפי נוסחת מכפלה סקלרית:

$$= \int m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v} \cdot \vec{v})\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

כלומר העבודה הוא הפרש הגודל $\frac{1}{2}mv^2$.

הגדרה 6.2. נגדיר אנרגיה קינטית של גוף בעל מסה m ומהירות v:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

ולכן:

$$W_{\text{forces all}} = \underset{\text{end,start}}{\Delta} E_k$$

לעובדה הזו קוראים **משפט עבודה אנרגיה**.

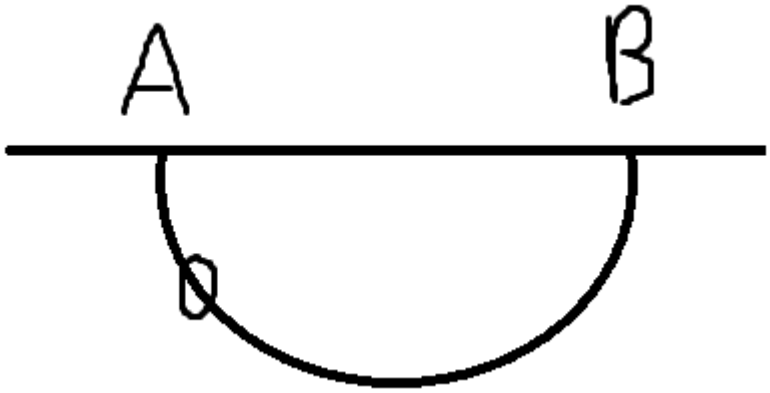
דוגמה. טבעת נעה לאורך המסגרת החצי מעגלית מנק' A לנק' B. תוך כדי תנועתה פועלים עליה, מלבד הנורמל וכוח הכובד גם שני כוחות נוספים:

$$\vec{F}_1 = 30N$$

בכיוון משיק למסגרת עם כיוון התנועה.

$$\vec{F}_2 = 150N$$

בכיוון קבוע ב$30°$ ביחס לציר האופקי. נניח כי $R = 1$ וכן $m = 5_{\text{kg}}$. הטבעת התחילה ממנוחה. מהי מהירותה בנקודה B?



פתרון. לפתור עם חוקי ניוטון זו קשה (ויש סיכוי שגם בלתי אפשרי). ניעזר במשפט עבודה אנרגיה.
בהתחלה, $v = 0$ ולכן העבודה הכוללת שווה לאנרגיה הקינטית בסוף. נשים לב כי:

$$W_{\text{all}} = W_N + W_{mg} + W_{F_1} + W_{F_2}$$

נתחיל מ W_N:

$$W_N = \int N\mathrm{d}r = \int N\mathrm{d}r\cos 90° = 0$$

(תמיד העבודה של כוח שמאונך למסלול הינה 0)

$$W_{F_1} = \int \vec{F}_1\mathrm{d}r = \int F\mathrm{d}r\cos 0 = F\int \mathrm{d}r = F\pi R = 30\cdot 1\cdot\pi$$

(סכום על מקטעים אינפיניטסימליים של חצי מעגל - זה בעצם היקף חצי מעגל! תודו שלא חשבתם על זה)

$$W_{F_2} = \int \vec{F}_2\mathrm{d}\vec{r} = \int (F_2\cos 30°\hat{x} + F_2\sin 30°\hat{y})\mathrm{d}\vec{r}$$

אבל $\mathrm{d}\vec{r}$ הוא וקטור משיק, דהיינו בכיוון $\hat{\theta}$ יחסית לטבעת, כלומר:

$$= \int (F_2\cos 30°\hat{x} + F_2\sin 30°\hat{y})(\mathrm{d}r\hat{\theta}) = \int (F_2\cos 30°\hat{x} + F_2\sin 30°\hat{y})\cdot \mathrm{d}r(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})$$

$$= \int (-F_2\cos 30°\sin\theta + F_2\sin 30°\cos\theta)\mathrm{d}r$$

נזכור כי ברדיאנים אורך קשת שווה לזווית כפול הרדיוס, ולכן:

$$\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\theta$$

ולכן:

$$\int_{\pi}^{2\pi} (-F_2\cos 30°\sin\theta + F_2\sin 30°)R\mathrm{d}\theta = F_2\cos 30°\cos\theta + F_2\sin 30°\sin\theta\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= 2F_2\cos 30°R = \cdots = 28J$$

כעת:

$$W_{mg} = \int (-mg\hat{y})\mathrm{d}\vec{r} = \int (-mg\hat{y}) \cdot R\mathrm{d}\theta(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}) = \int_{\pi}^{2\pi} -mgR\cos\theta\mathrm{d}\theta = -mgR\sin\theta|_{\pi}^{2\pi} = 0$$

ובסה"כ:

$$0 + 30\pi + 28 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

לאחר עבודה מאומצת (שקר) נקבל כי:

$$v_B = 32_{m/s}$$

6.2 כוחות משמרים

בדוגמה הראשונה שפתרנו, ראינו שהאינטגרל הקווי היה שונה בכל מסלול.
אנחנו נדבר בסעיף זה על כוחות שהעבודה שלהן זהה

הגדרה 6.3. כוח $F = P\hat{x} + Q\hat{y}$ נקרא משמר אם בין כל שתי נקודות העבודה אינה תלוייה במסלול.

הגדרה 6.4 (הגדרה שקולה)**.** כוח $F = P\hat{x} + Q\hat{y}$ נקרא משמר אם העבודה שלו לאורך כל מסלול סגור הוא 0.

נראה צד אחד של השקילות, הצד השני מושאר לקוראים (מוהאהאה)
אם כוח משמר בין כל שתי נקודות, אם נבחר את המסלול מנקודה A אל עצמה, נקבל 0, וזה בכל מסלול מ A לעצמו - דהיינו מסלול סגור.

הגדרה 6.5 (עוד הגדרה שקולה)**.** כוח $F = P\hat{x} + Q\hat{y}$ נקרא משמר אם קיימת פונקציית פוטנציאל (או פונקציית אנרגיה פוטנציאלית) אם:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

(זכרו כי:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}$$

)

הגדרה 6.6 (הגדרה שקולה עוד פעם)**.** בהינתן תחום פשוט קשר (אין בו "חורים" ואפשר לכווץ את התחום ע"י גומייה), כוח נקרא משמר אם:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

כאשר:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

דוגמה. קבעו האם הכוח:

$$\vec{F} = y\hat{x} + x\hat{y}$$

משמר.

פתרון. נבדוק אם קיימת U פונקציית פוטנציאל כך ש:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$
$$\begin{cases} y = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ x = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

נביט במשוואה אחת ונאסכם לפי x:

$$U(x,y) = -yx + f(y)$$

שכן הגזירה לפי x תהפוך את הביטוי של $f(y)$ לאפס. נציב במשוואה השנייה ונמצא את הפונקציה:

$$x = x - f'(x)$$
$$f'(x) = 0 \iff f(y) = C$$

ולכן:

$$U(x,y) = -yx + C$$

מצאנו פונקציית פוטנציאל - ולכן $\vec{F}$ כוח משמר.

דוגמה. קבעו האם הכוח הבא משמר:

$$\vec{F} = y\hat{x} + 2x\hat{y}$$

פתרון. ננסה למצוא U כך ש:

$$F = -\vec{\nabla}U$$
$$\begin{cases} y = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ 2x = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

באותו עיקרון, נאסכם את 1 ונקבל:

$$U(x,y) = -xy + f(y)$$

נציב ב2:

$$2x = x + f'(y)$$
$$f'(y) = x$$

בסתירה, כי $f(y)$ תלוייה בy בלבד.

דוגמה. נוכיח כי כוח הכבידה:

$$\vec{F} = -mg\hat{y}$$

כוח משמר.

פתרון. נגדיר:

$$U = mgy$$

נחשב את הגרדיאנט:

$$-\vec{\nabla}U = -\cancel{\frac{\partial U}{\partial x}}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} - \cancel{\frac{\partial U}{\partial z}}\hat{z} = -mg$$

כפי שרצינו

דוגמה. נוכיח כי הכוח האלסטי משמר:

$$\vec{F} = -kx\hat{x}$$

פתרון. נגדיר:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

נבדוק:

$$-\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

כמבוקש.

כעת, מה הקשר בין כוחות משמרים לאנרגיה?
אם:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

אז:

$$U = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int -F_x\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}y - F_z\mathrm{d}z$$

ולכן:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^{r_0} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} + \int_{r_0}^B \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = (-U(r_0)) - (-U(A)) + (-U(B)) - (-U(r_0))$$
$$= U(A) - U(B) = -\underset{A\to B}{\Delta} U$$

כעת ממשפט עבודה אנרגיה:

$$W_{\text{forces all}} = \Delta E_k$$

נפריד את עבודת הכוחות המשמרים לעבודת הכוחות הלא משמרים:

$$W_{\text{reserve}} + W_{\text{reserve not}} = \Delta E_k$$

$$-\Delta U + W_{\text{reserve not}} = \Delta E_k$$
$$W_{\text{reserve not}} = \Delta(E_k + U)$$

נקרא לגודל הבא:

$$E_k + U = E$$

אנרגיה מכנית (כוללת). ועל כן נקבל את הגרסה השנייה של משפט עבודה אנרגיה:

$$W_{\text{reserve not}} = \Delta E$$

ובעזרתו ניתן לקבל את חוק שימור האנרגיה:
אם עבודת הכוחות הלא משמרים מתאפסת, אז יש שימור אנרגיה מכנית.

דוגמה. נתונה המערכת הבאה:
מכווצים את הקפיץ בכיווץ ℓ_0. מהי מהירות המסה ברגע שהוא מגיע לגובה H_1? (הזניחו את החיכוך)

פתרון. הכוחות אשר פועלים על המסה הינם הכבידה, הקפיץ והנורמל. הכוח היחיד שאינו משמר הוא הנורמל, אבל הוא ניצב למסלול - ולכן העבודה שלו הינה 0. סה"כ עבודת כל הכוחות הלא משמרים היא 0 ולכן יש שימור אנרגיה.
סכום האנרגיות ברגע $t = 0$ (נניח שהמסה מתחילה במנוחה):

$$E_A = E_h + E_{sp} = mgH + \frac{1}{2}k\ell_0^2$$

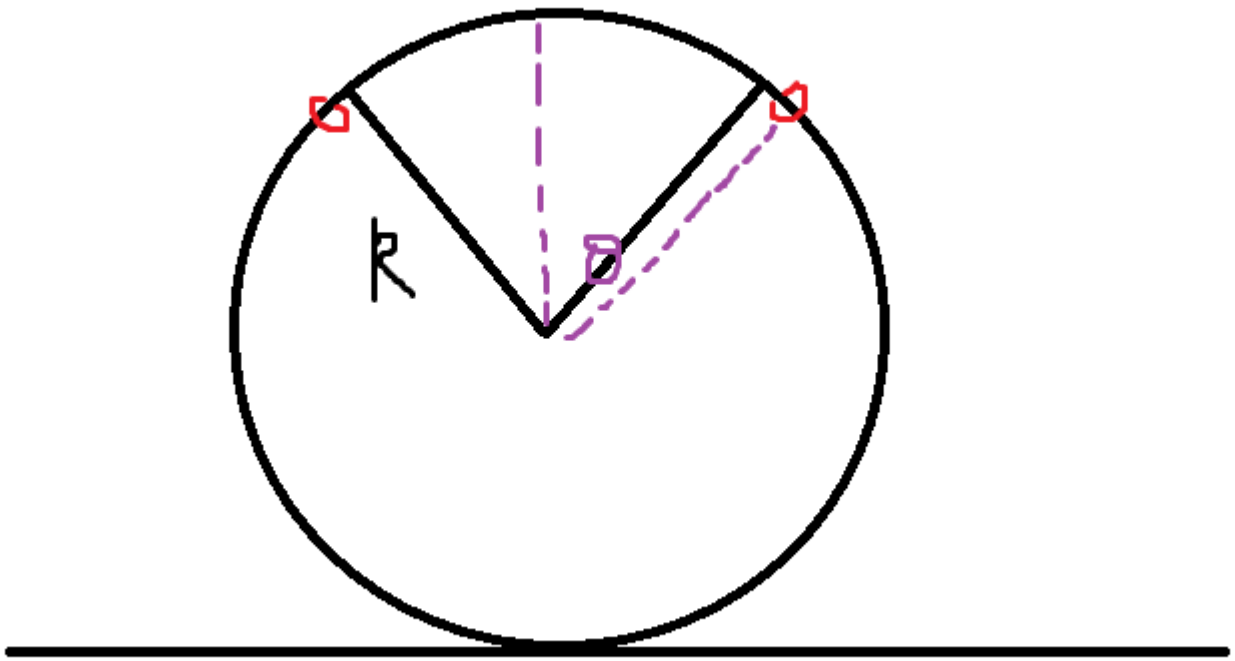
סכום האנרגיות ברגע העלייה על הגבעה:

$$E_B = E_h + E_k = mgH_1 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

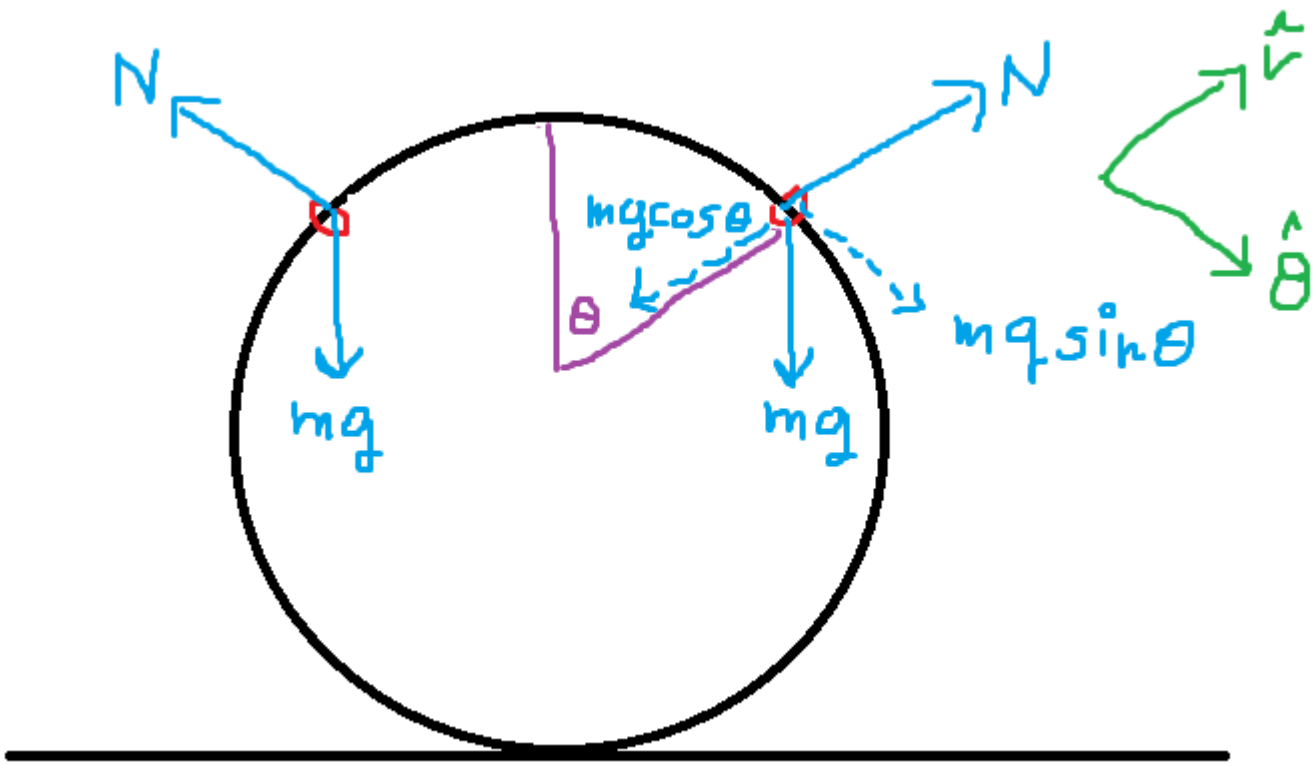
נשווה בין v_A ל v_B:

$$v_B = \sqrt{\frac{2mg(H - H_1) + k\ell_0^2}{m}}$$

דוגמה 6.7. נתונה טבעת מעגלית בעלת רדיוס R ומסה M. ברגע $t = 0$ שחררו שני חרוזים שמסתם m, שיורדים לאורך הטבעת באופן סימטרי. באיזו זווית θ יחסית לראש המעגל הטבעת תקפוץ?



פתרון. על החרוזים פועל כוח נורמל, רק שאיננו יודעים מהו הכיוון שלו (תלוי לאיזה כיוון הוא לחוץ).
התנאי להתנתקות הטבעת מהרצפה היא התאפסות הנורמל.
הכוחות הפועלים על החרוזים הם mg והנורמל. נפרק לרכיבים את mg כיוון שנשתמש במערכת צירים פולרית.



לפי החוק השני של ניוטון:

$$\sum F_r = ma_r$$

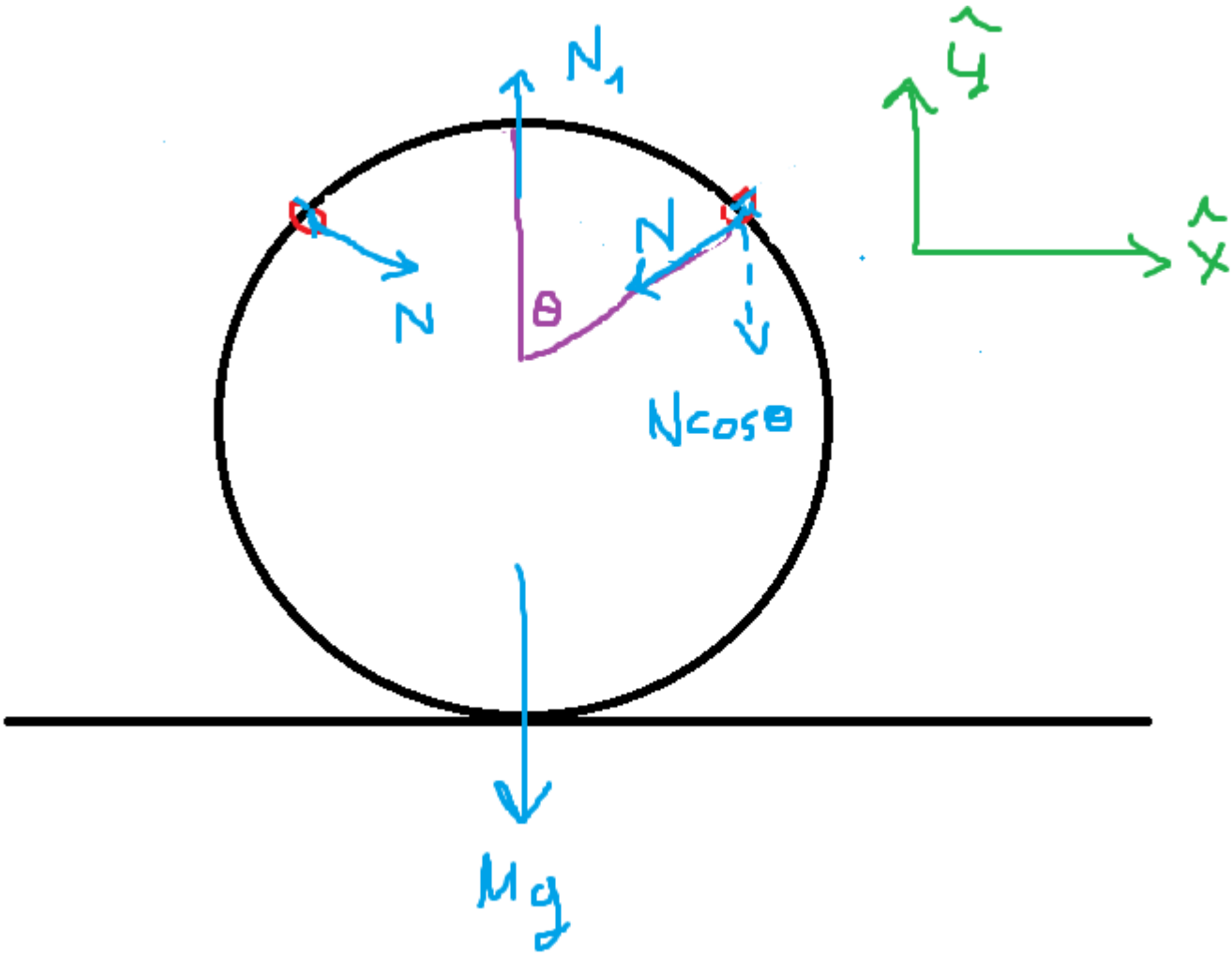
$$N - mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta$$

$$\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}R\ddot{\theta}$$

$$g\sin\theta = R\ddot{\theta}$$

אבל אלו מד"ר לא פתירות (לפחות מבחינה אלמנטרית). נכתוב משוואת כוחות על הטבעת:



(הנורמל בציר x מתבטל ולכן לא כתבתי אותו). משוואת הכוחות בציר y בקטע הקריטי:

$$\sum F_y = 0$$

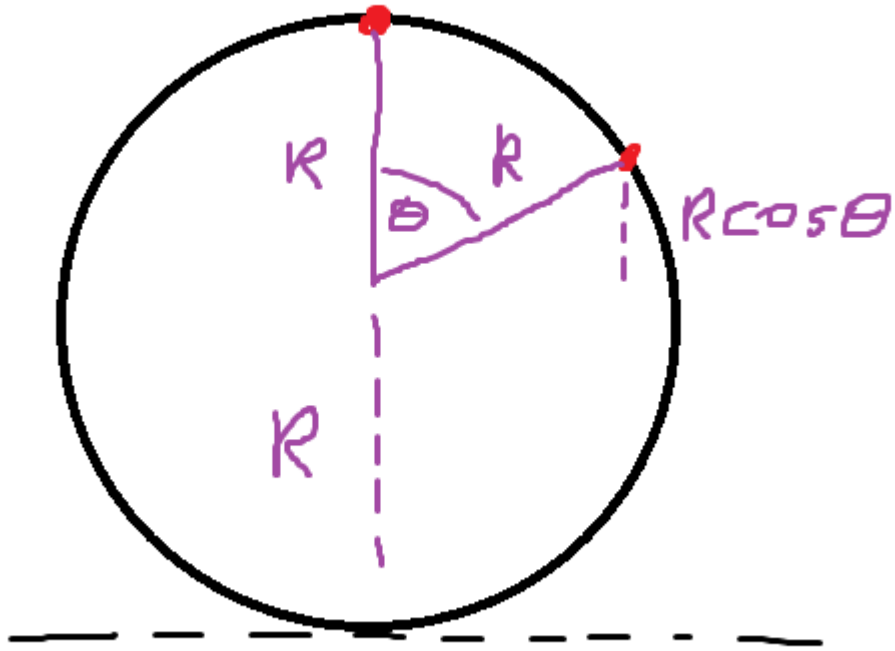
$$N_1 - Mg - 2N\cos\theta = 0$$

$$N_1 = Mg + 2N\cos\theta$$

אבל גם זה לא עוזר!
ננסה להשתמש באנרגיה.

הנורמל הוא הכוח הלא משמר היחיד כאן, אך עבודתו היא 0 כי הוא ניצב לכיוון התנועה של החרוזים, ולכן יש שימור אנרגיה.
האנרגיה של החרוז בהתחלה הינה אנרגיה פוטנציאלית בלבד, כלומר mgR. כעת, בזווית θ כלשהי:

$$E(\theta) = mg2R = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R + R\cos\theta)$$



ולכן:

$$v^2 = 2gR - 2gR\cos\theta = 2Rg(1+\cos\theta)$$

אבל נזכור כי בקואורדינטות פולריות:

$$v = R\dot{\theta}$$
$$\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל:

$$N - mg\cos\theta = -mR\cdot\frac{v^2}{R^2}$$
$$N - mg\cos\theta = -2mg(1-\cos\theta)$$
$$N = -2mg + 3mg\cos\theta$$

(בדיקת שפיות: אם $\theta = 0$ אזי הנורמל הוא mg) כעת אפשר להציב זאת במשוואת הכוחות ב$\hat{\theta}$:

$$0 = N_1 = Mg + 2N\cos\theta$$

$$Mg + 2(-2mg + 3mg\cos\theta)\cos\theta = 0$$
$$Mg - 4mg\cos\theta + 6mg\cos^2\theta = 0$$

זוהי משוואה ריבועית עבור $\cos^2\theta$ (ונחלק את שני הצדדים ב g):

$$\cos\theta = \frac{4m \pm \sqrt{16m^2 - 24Mm}}{12m}$$

נבחר את הזווית הקטנה יותר (ולכן את ה+). לכן:

$$\cos\theta = \frac{4 + \sqrt{16m - 24\frac{M}{m}}}{12}$$

כדי שיהיה פתרון נדרוש כי $16 - 24\frac{M}{m} \geq 0$, כלומר:

$$16 \geq 24\frac{M}{m}$$

$$m \geq \frac{3}{2}M$$

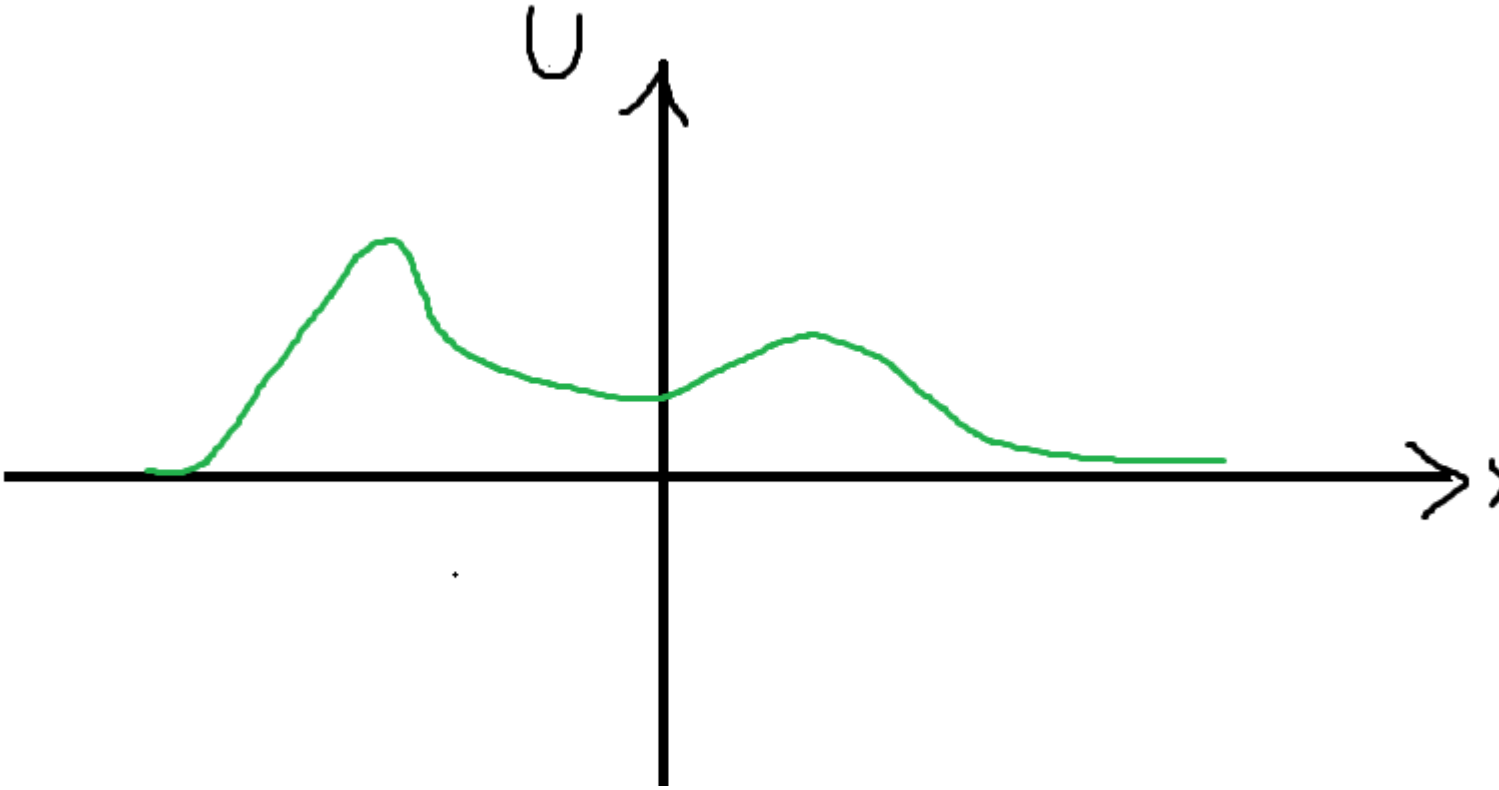
(כלומר עבור חרוזים עם מסה קטנה הטבעת לא תקפוץ, אבל עבור מסת חרוז גדולה מספיק הוא כן יקפוץ)

6.3 דיאגרמת אנרגיה

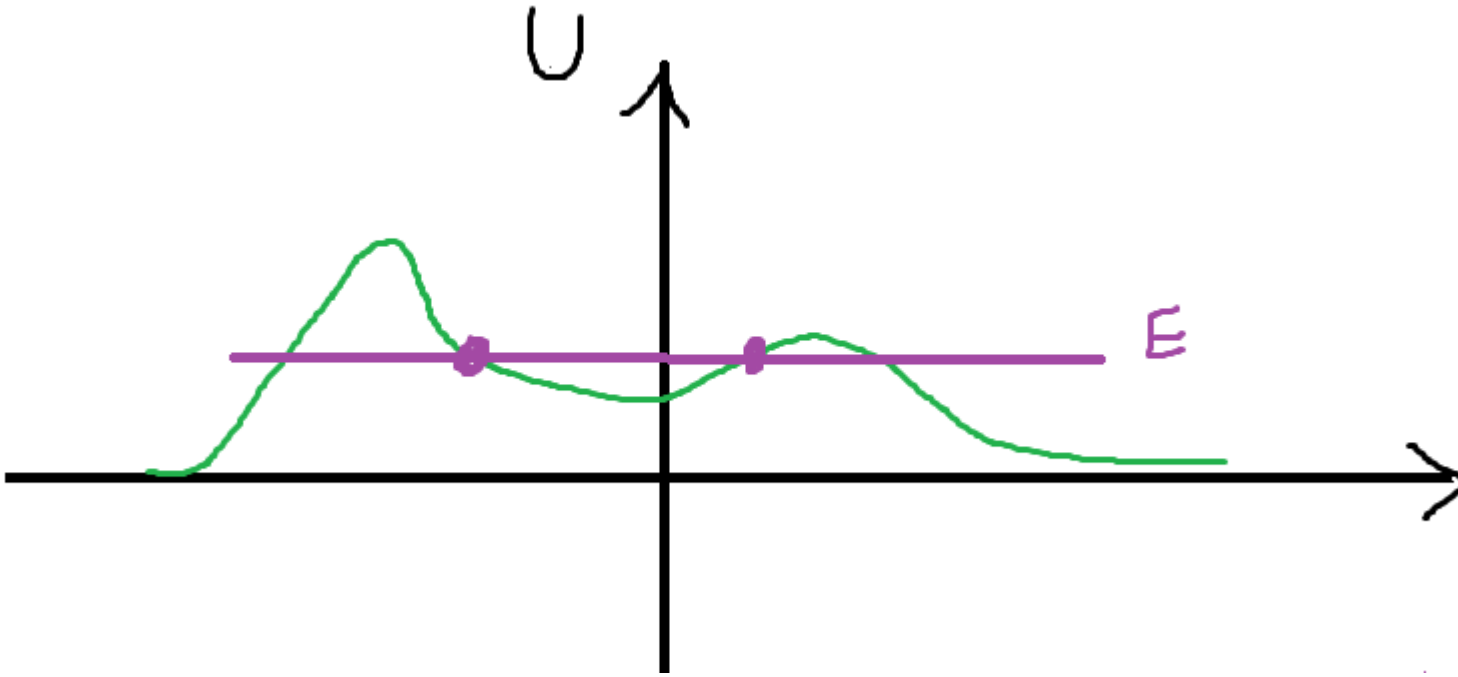
נסתכל על גוף שנע לאורך ציר חד-מימדי, ונתון לו פוטנציאל $U(x)$. הכוח הפועל עליו הינו:

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

(כי רק משתנה אחד)



כעת יש לגוף אנרגיה כוללת E, נסמנה על הגרף:



כעת:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

(קבוע כי שימור אנרגיה). לכן בנקודה בה $U(x) = E$ מתקיים כי $v = 0$, ולכן חוזר אחורה. על כן הגוף ינוע בצורה מעגלית! לנקודות בהם $U(x) = E$ קוראים "נקודות מפנה".

לכן, נשים לב כי בגלל ש E שווה לגודל חיובי ועוד $U(x)$, אזי $E \geq U(x)$. מכאן כל מקום בו $U(x) > E$ הגוף לא יכול להיות שם. למקום זה קוראים מקום אסור. באיזורים שנמצאים מחוץ למקום בו הגוף מבצע תנועה מחזורית הגוף בורח ל ∞ או ל $-\infty$ (בהתאם לכיוון של התנועה). אם נעלה את האנרגיה להיות גדולה יותר מן הבור, הגוף יברח ל ∞ כי יצליח להתגבר על מחסום האנרגיה שנוצר בבור. ואם נעלה את האנרגיה להיות מעל הגרף, דבר לא ימנע מן הגוף לברוח ל $\pm\infty$.

נגדיר נקודות שיווי משקל להיות נקודות קיצון בגרף $U(x)$ לפי x - כי בהן $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0$. נשים לב שאם מדובר בנקודת מקסימום, אם נזיז אפילו במעט את הגוף אזי הכוח ייגבר ויגבר ויתרחק מנקודת שיווי משקל כיוון שהנגזרת בכיוון המנוגד לכוח ומינוס כפול מינוס הוא פלוס (לכן נקראת נק' שיווי משקל לא יציבה). מנגד, אם מדובר במינימום, הכוח יפעל לכיוון נק' שיווי המשקל כך שתחזיר אותו אל נק' שיווי המשקל! שהרי הנגזרת תהיה בכיוון הכוח ולכן יהיה שלילי (לכן נקראת יציבה). נזכור כי נק' מינימום קורת כאשר:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0 \wedge \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

ומקסימום כאשר:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0 \wedge \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}F^2} < 0$$

אפשר להסיק מכאן כי קרוב לנק' שיווי משקל יציבה, הגוף יבצע תנועה מחזורית ונרצה למצוא את תדירותה.
נרשום את $U(x)$ כטור טיילור מסדר שני בנקודה היציבה x_0:

$$U(x) = U(x_0) + \cancelto{0}{U'(x_0)(x - x_0)} + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2$$

ולכן בשינוי שמות:

$$U(x) = A + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

וזוהי אנרגיה פוטנציאלית המתאימה לתנועה הרמונית! ולכן התדירות הינה (כאשר m מסת הגוף):

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{U'(x_0)}{m}}$$

6.4 התנגשויות ומערכת מרכז המסה

בהינתן שני גופים m_1, m_2 במהירות $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ אשר מתנגשים במישור, ייתכנו מספר מקרים.

- m_1, m_2 נדבקים אחד לשני ונעים ביחד (למקרה זה קוראים התנגשות פלסטית).
- m_1, m_2 נפרדים ויש שימור אנרגיה (למקרה זה קוראים התנגשות אלסטית).
- m_1, m_2 נפרדים ואין שימור אנרגיה.

נשים לב כי אם נצמיד ל m_1 קפיץ, אזי ההתנגשות תהיה בהכרח אלסטית (הכוח היחידי שפעל הוא כוח הקפיץ, שהוא משמר).
זכרו כי בשאלות של התנגשות, אין להניח באופן כללי שימור אנרגיה (אך אם נתון קפיץ כמו מקודם אפשר להבין כי יש שימור אנרגיה).
נרצה לפתור באופן כללי את בעיית התנגשות הגופים. נתונים $m_1, m_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ והנעלמים הם $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (המהירויות לאחר ההתנגשות). נזכור כי נעלמים וקטוריים ניתן להפוך ל4 גדלים סקלרים: $u_1, u_2, \alpha_1, \alpha_2$ (הזוויות של הוקטורים).
משימור תנע, אפשר לקבל שני משוואות על u_1, u_2.
אם יש שימור אנרגיה וההתנגשות אלסטית, אפשר להשתמש גם במשוואת שימור האנרגיה.
את המשוואות הנוספות יש להסיק מתנאי התחלה, ולכן הבעיה לא פתירה עד הסוף (ולכן צריך נתונים נוספים).

נרצה להביט במערכת אחרת וממנה ננסה להסיק דברים חכמים.
נזכור כי מערכת מרכז מסה:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

במ.מ.מ. לכל הגופים יש מהירות אחרת:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{cm}} = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{cm}} = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

כעת מכיוון שאין כוחות חיצוניים על המערכת (אנחנו לוקחים את כל המסות כמערכת הכוללת), התנע $\vec{p}'$ קבוע והינו:

$$\vec{p}' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} + \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

(תרגיל לקוראים, תעשו מכנה משותף). כלומר התנע הכולל במ.מ.מ. הוא תמיד 0.
לכן, על מנת שהתנע הכולל יתאפס, על $\vec{v}_2'$ להיות בכיוון הנגדי ל $\vec{v}_1'$, וגם לאחר ההתנגשות!
להתנגשות כזו קוראים התנגשות קו-לינארית (כי כל הוקטורים נמצאים על קו אחד). לכן לאחר ההתנגשות ישנה הסטה ב θ של הקו המחבר בין המהירויות.
לזווית זו קוראים זווית פיזור. לכן:

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = 0$$

ואם ההתנגשות אלסטית:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2'^2$$

7 תנע זוויתי

7.1 מבוא ואינטואיציה

עד כה דיברנו על שני גדלים שנשמרים:

- אנרגיה: נשמרת כאשר עבודת הכוחות הלא משמרים היא 0 (מהנוסחה $W_{\text{reserves not}} = \Delta E$).
- תנע (קווי): נשמר כאשר אין כוחות חיצוניים (מהנוסחה $\vec{J}_{\text{includes}} = \Delta\vec{p}$)

כעת נראה גודל נוסף שנשמר, בתנאים מסוימים.

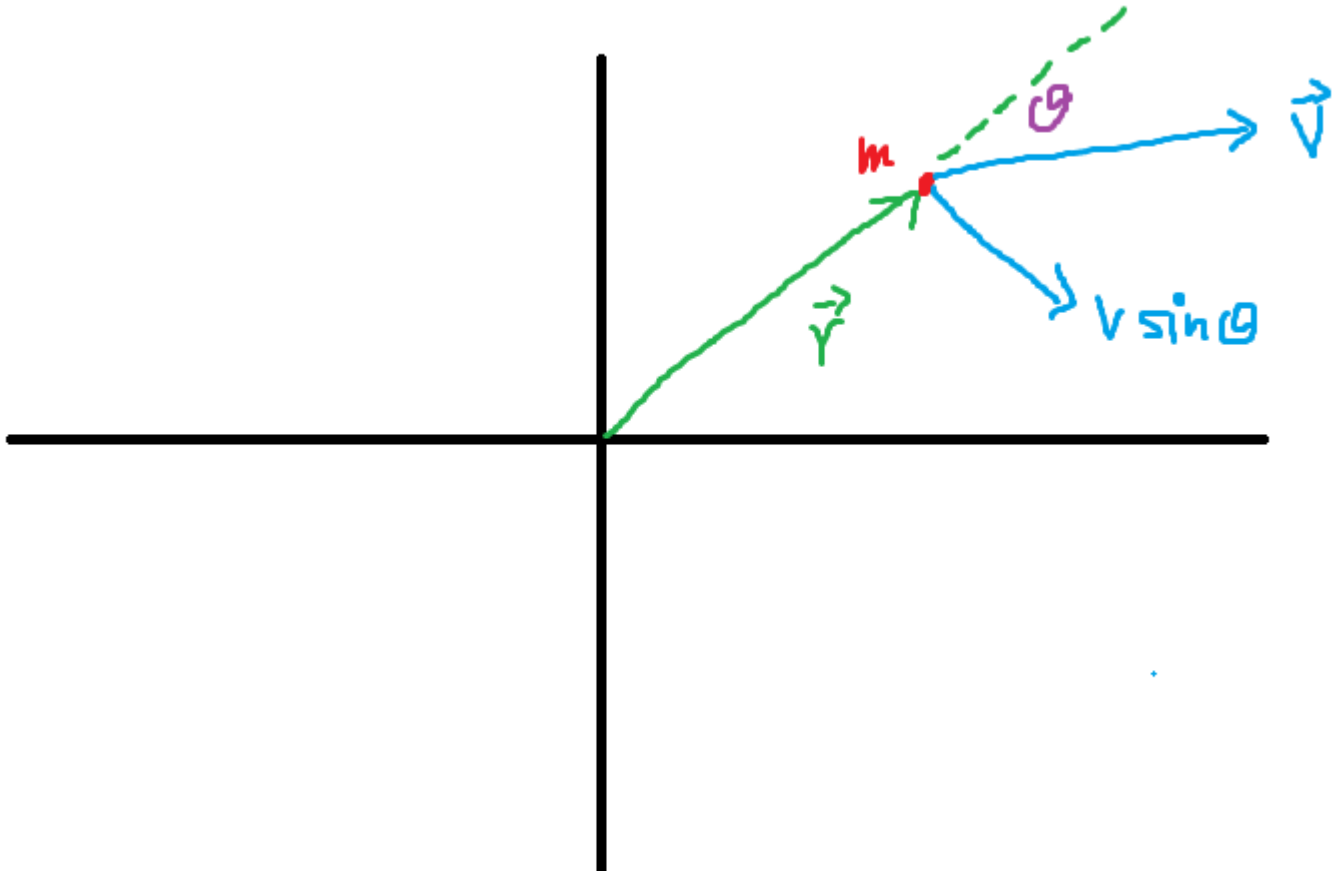
הגדרה 7.1. תנע זוויתי של גוף בנק' ייחוס עם מסה m, מהירות $\vec{v}$ ומיקום $\vec{r}$ הינו:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

ננסה להבין את המשמעות של ההגדרה.

$$\left|\vec{L}\right| = r \cdot p \cdot \sin\theta$$

שזהו למעשה גודל הרכיב שפועל בכיוון המשיקי; כלומר הרכיב שתורם לתנועה מעגלית. באופן כללי התנע הזוויתי מראה עד כמה הגוף "מסתובב" סביב הנקודה O.



הגדרה 7.2. בהינתן גוף הנע $\vec{r}$ עם כוח $\vec{F}$, מומנט כוח (או טורק) של הכוח הינו:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(כאשר $\vec{r}$ וקטור המיקום על נקודת הפעלת הכוח).

טענה 7.3. מתקיים כי:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}$$

הוכחה. נשתמש בגזירת מכפלה וקטורית:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p}}_{=\vec{v}\times m\vec{v}=0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

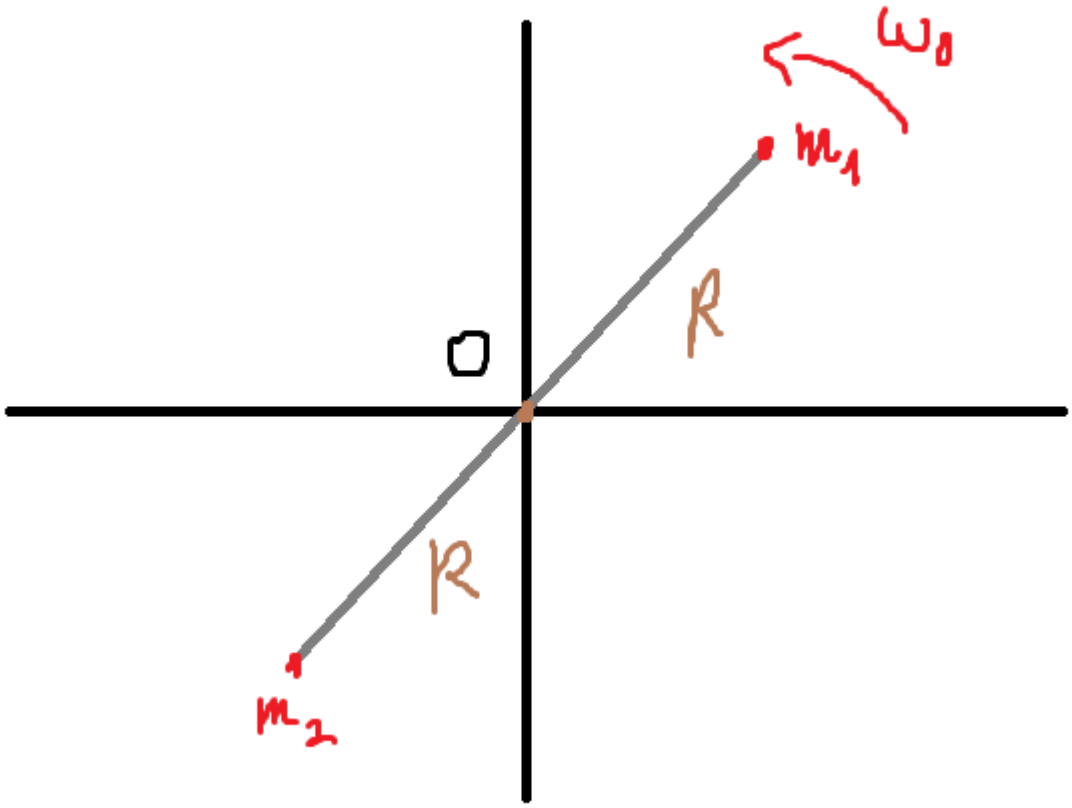
■

מכאן אפשר להגיע לחוק שימור התנע הזוויתי:

משפט 7.4. אם $\vec{\tau} = 0$ אזי $\vec{L}$ קבוע לכל זמן ונשמר.

הערה. במערכות פיזיקליות, מספיק לבדוק שהטורק החיצוני הכולל (סכום הטורקים של כל הכוחות החיצוניים) הוא 0, עקב הנחה פיזיקלית סבירה שכל הכוחות הפנימיים הפועלים בין שני גופים פועלים לאורך הקו הישר שמחבר בינהם.
(רוב הכוחות בטבע מתנהגים כך, למעט הכוח המגנטי אך הוא עדיין מתבטל מסיבה אחרת).
כלומר, בכדי להגיע לחוק שימור התנע הזוויתי הפרקטי עלינו להכניס הנחה סבירה! החוק אינו תלוי אך ורק בחוקי ניוטון (אע"פ שלא מצאו לו הפרכה עדיין)

דוגמה 7.5. מוט חסר מסה בעל אורך $2R$ מסתובב סביב הנקודה O במהירות זוויתית קבועה ω_0. נתון שהמסות m_1, m_2 מתחילות להתקרב לעבר ראשית הצירים במהירות u קבועה (ביחס למוט) בעוד שהמוט מוחזק ע"י ציר בראשית. מצאו את המהירות הזוויתית של המערכת כפונקציה של הזמן (הזניחו כבידה וחיכוך).



פתרון. הציר מפעיל מאין "כוח נורמלי" על המוט, ולכן מפעיל טורק על כל נקודה על המוט פרט לראשית (שם המיקום הוא 0) ולכן בראשית התנ"ז [תנע זוויתי] נשמר. אם זה לא היה ברור קודם, נקבע את הראשית סביב מרכז המוט.
התנ"ז על המערכת:

$$\vec{L}_{\text{start}} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

נחשב:

$$= R\hat{r} \times m_1(-u\hat{r} + R\omega_0\hat{\theta}) + R\hat{r} \times m_2(-u\hat{r} + R\omega_0\hat{\theta})$$

נזכור כי $\hat{r} \times \hat{r} = 0$, וכמו"כ $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$ (דומה מאוד לבסיס הסטנדרטי):

$$= R^2 m_1\omega_0\hat{z} + R^2 m_2\omega_0\hat{z} = (m_1 + m_2)R^2\omega_0\hat{z}$$

וברגע כלשהו:

$$\vec{L}(t) = (R-ut)\hat{r} \times m_1(-u\hat{r} + (R-ut)\omega\hat{\theta}) + (R-ut)\hat{r} \times m_2(-u\hat{r} + (R-ut)\omega\hat{\theta})$$
$$= m_1(R-ut)^2\omega\hat{z} + m_2(R-ut)^2\omega\hat{z} = (m_1+m_2)(R-ut)^2\omega\hat{z}$$

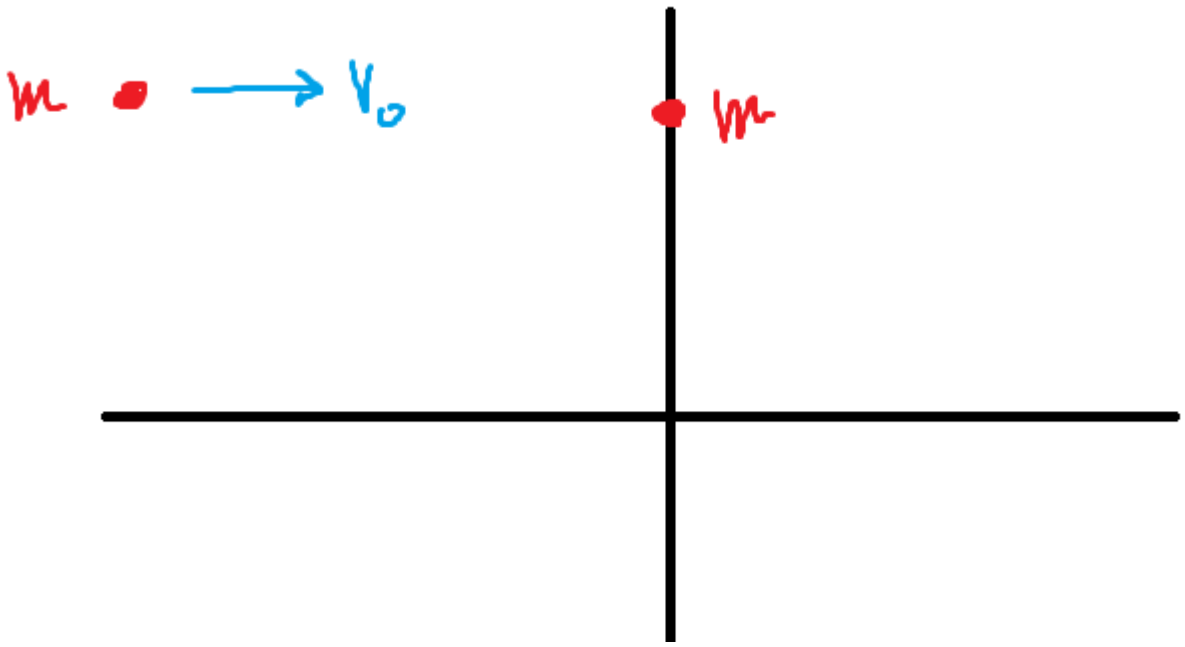
נשווה את שני האגפים משימור תנע:

$$(m_1+m_2)(R-ut)^2\omega = (m_1+m_2)R^2\omega_0$$

$$\omega = \frac{R^2\omega_0}{(R-ut)^2}$$

ככל שהמסות קרובות יותר, כך המהירות הזוויתית תגדל. אם תנסו להסתובב על כיסא, ככל שתשימו את הידיים קרובות יותר כך תנועו מהר יותר.

דוגמה 7.6. חלקיק בעל מסה m ומהירות v_0 פוגע התנגשות פלסטית בחלקיק זהה השרוי במנוחה.



1. מהי מהירות שני הגופים לאחר ההתנגשות?
2. הראו שיש שימור תנע זוויתי סביב הראשית.

פתרון. נפתור את כל הסעיפים:

1. נשתמש בשימור תנע קווי: $mv_0 = 2mu \iff u = \frac{v_0}{2}$.
2. נסמן ב x_0 את המיקום ההתחלתי של הגוף. לכן בהתחלה:

$$\vec{L}_{\text{before}} = [(-x_0 - v_0 t)\hat{x} + y_0\hat{y}] \times [mv_0\hat{x}] = -mv_0y_0\hat{z}$$

(שימו לב שהרכיב של $\hat{x}$ של המיקום שלילי כי הוא נמצא בכיוון השלילי של הציר)
קיבלנו שהתנ"ז לא תלוי בזמן! זה הגיוני כי אם כן היה פועל עליו טורק, ואין שימור תנ"ז. כעת לאחר ההתנגשות:

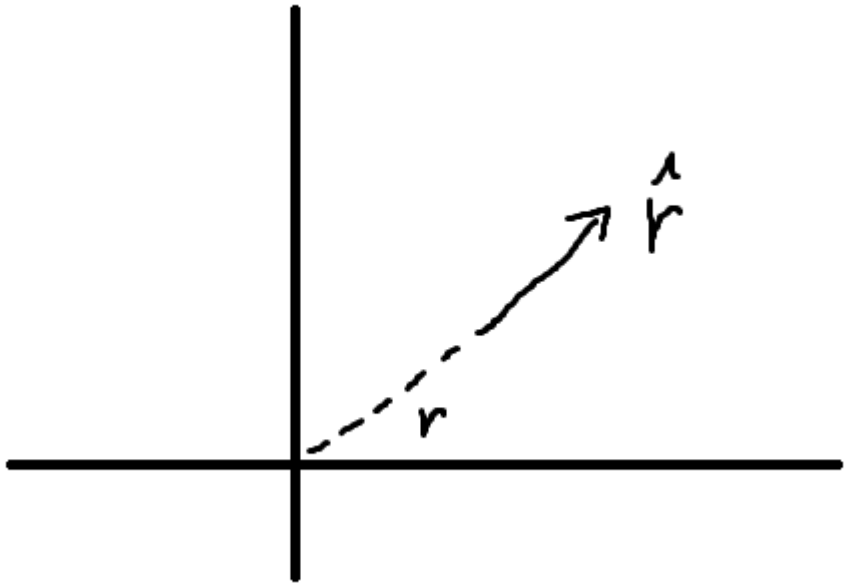
$$\vec{L}_{\text{after}} = \left[\frac{v_0}{2}t\hat{x} + y_0\hat{y}\right] \times 2m \cdot \frac{v_0}{2}\hat{x} = -mv_0y_0\hat{z}$$

המסקנה המתבקשת מהתרגיל הקודם: בהתנגשות בין גופים נקודתיים, שימור תנע קווי שקול לשימור תנ"ז ולכן לא מוסיף לנו מידע.

7.2 כוח מרכזי

הגדרה 7.7. כוח מרכזי הוא כוח התלוי אך ורק במרחק מנק' מסויימת, ופועל בכיוונו בלבד:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$$



הדוגמאות הקלאסיות לכוח מרכזי הוא כוח הכבידה:

$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

(בכיוון וקטור הכיוון בין שני הגופים) וכוח קפיץ:

$$\vec{F} = -k(r-\ell)\hat{r}$$

(בכיוון הקפיץ)

טענה 7.8. בכוח מרכזי תנ"ז נשמר.

הוכחה. נחשב את הטורק:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (F(r)\hat{r}) = 0$$

ולכן התנ"ז נשמר. ■

טענה 7.9. כוח מרכזי הוא כוח משמר.

הוכחה. נראה שקיים U כך ש $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.

$$F(r)\hat{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\iff U = -\int F(r)\mathrm{d}r$$

■

בסה"כ תחת כוח מרכזי, $\vec{L}, \vec{E}$ נשמרים.

טענה 7.10. התנועה תחת כוח מרכזי היא תמיד במישור אחד.

הוכחה. נביט ברגע t בו $\vec{r}$ ו $\vec{v}$ נמצאים על מישור הלוח. התנ"ז:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

קבוע. אבל התנ"ז ניצב ל $\vec{r}$ ול $\vec{v}$ ולכן כל הזמן הוא ניצב בכיוון שלו - ועל כן $\vec{r}$ ו $\vec{v}$ לא יכולים לצאת מהמישור (אחרת התנ"ז היה משתנה). ■

המסקנה מהטענה הקודמת היא שניתן לתאר את התנועה של החלקיק בקואורדינטות פולריות:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

ולכן:

$$\vec{L} = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$$

וזהו גודל קבוע!

$$\boxed{L = mr^2\dot{\theta}}$$

באופן דומה, נרשום את האנרגיה של חלקיק כאשר פועל עליו כוח מרכזי:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r)$$

נציב $\dot{\theta} = L/mr^2$, כפי שהוכחנו קודם:

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{L^2}{m^2r^4} + U(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

למעשה, אפשר לחשוב על $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ כמו האנרגיה הקינטית של התנועה המעגלית,
על $\frac{L^2}{2mr^2}$ האנרגיה הקינטית הנתרמת של התנועה הזוויתית.
ועל $U(r)$ כפוטנציאל.

בפרט, עבור חלקיק שנע רק בציר $\hat{x}$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

ניתן מכאן להסיק את המשפט החושב הבא:

משפט 7.11. תנועת חלקיק בכוח מרכזי שקולה לתנועה חד מימדית, כאשר הפוטנציאל המקורי מוחלף בפוטנציאל אפקטיבי:

$$U_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

(שני סימונים לאותו הדבר)

כלומר במקום לפתור תנועה של חלקיק בתלת מימד - בחד מימד.

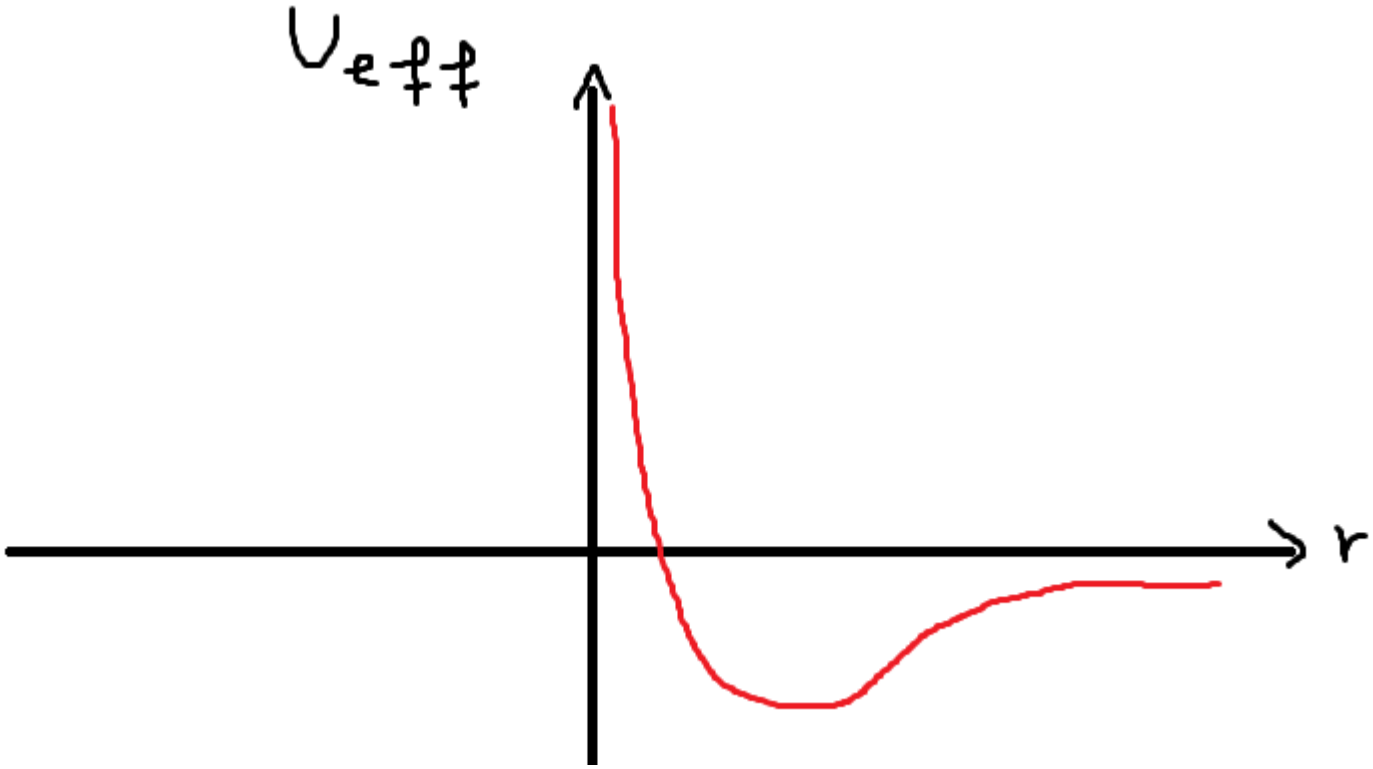
נביט לדוגמה בכוח הכבידה:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

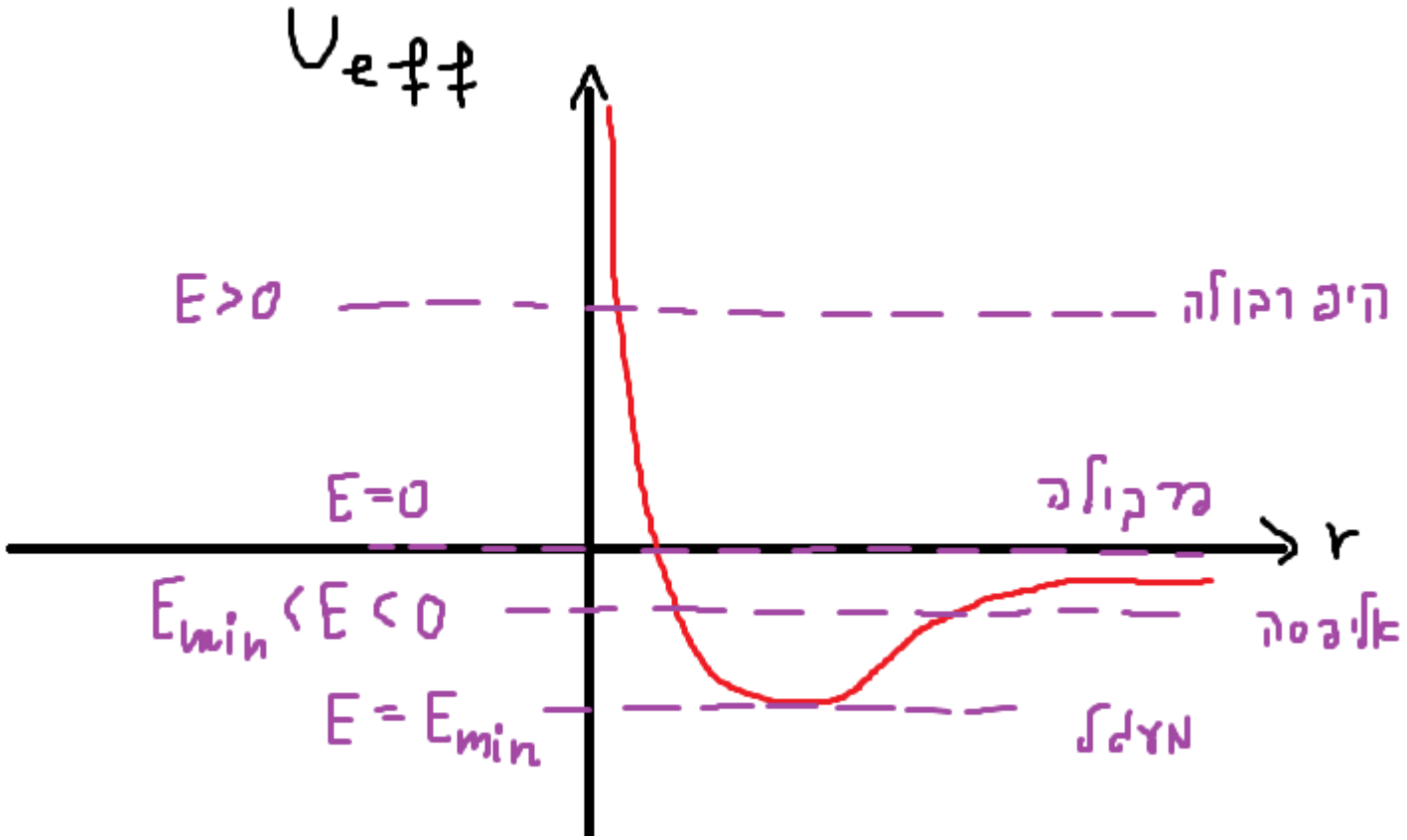
ולכן הפוטנציאל האפקטיבי:

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

נביט בדיאגרמת האנרגיה (בהנחה ש $L \neq 0$):



אם נעניק לגוף אנרגיה בדיוק במינימום - נקבל שגוף יישאר באותו מיקום על $\vec{r}$, כלומר תנועה מעגלית!
אם נעניק לגוף אנרגיה בין המינימום ל 0 - נקבל שהגוף יבצע תנועה אליפטית (נוכיח בהמשך).
אם נעניק אנרגיה $E=0$ התנועה תהיה פרבולית.
אם נעניק אנרגיה חיובית התנועה תהיה היפרבולית.



(באופן כללי, בנק' המינימום של הפוטנציאל האפקטיבי נקבל תנועה מעגלית)

7.3 בעיית קפלר

נרצה לנתח באופן מדויק את המסלולים האפשריים של גופים תחת כוח הכבידה. בעיות אלה נקראות גם בעיות קפלר. קפלר היה פיזיקאי שניסח מתמטית את התנועה של כוכבי הלכת סביב השמש.

קצת היסטוריה: היוונים האמינו שתנועת הכוכבים מעגלית סביב כדו"א - שכן מעגל הוא הצורה המושלמת ביותר.
עם השנים, המדידות נהיו יותר טובות וראו שלפעמים חלק מכוכבי הלכת נראים חוזרים אחורה. בשביל לתקן, הוסיפו "אפיציקלים" - כלומר מעגלים נוספים שגם דרכם מסתובבים הכוכבים. התיאוריה הייתה מאוד מסובכת, אך עבדה.
קפלר היה מתמטיקאי שקיבל את התצפיות של טיכו האסטרונום הדני. הוא הגיע למסקנות הבאות:

- תנועת הכוכבים היא אליפסה. ולא מעגלים.
- בזמנים שונים, הכוכבים מכסים שטחים שונים.
- קשר בין הזמן שלוקח לגוף לעשות את התנועה.

מאז, פיזיקאים ניסו להסביר את הנכונות של חוקי קפלר. ניוטון הוכיח שאם כוח הכבידה הוא מה שאמרנו – נקבל תנועה אליפטית וכן שזה הכוח היחיד שיעשה זאת.
המטרה: למצוא את המסלולים האפשריים לגוף תחת השפעת כוח הכבידה.

משוואת התנועה:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

נביט ברכיב $\hat{r}$:

$$-\frac{GMm}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

נסמן $k = GM$:

$$-\frac{k}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

כזכור:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

נציב $\dot{\theta} = L/mr^2$ ונקבל:

$$-\frac{k}{r^2} = \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3}$$

זוהי מד"ר על r - נפתורה כ $r(\theta)$.
נציב $r = \frac{1}{u}$. לכן:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

ולכן:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

(שכן $u = 1/r$) ולכן:

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

נציב במשוואת התנועה:

$$-ku^2 - \frac{L^2}{m^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{L^2}{m^2}u^3$$

נסדר:

$$\frac{km^2}{L^2} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -u + \frac{km^2}{L^2}$$

זוהי מד"ר הרמונית!

$$u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{km^2}{L^2}$$

ולכן:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{km^2}{L^2}$$

$$r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{km^2}{L^2}}$$

$$r = \frac{L^2/km^2}{\frac{AL^2}{km^2}\cos(\theta - \theta_0) + 1}$$

נסמן:

$$r_0 = L^2/km^2$$

$$e = \frac{AL^2}{km^2}$$

נסובב את המערכת שלנו כך ש $\theta_0 = 0$ (הרי זו זווית ייחוס) ונקבל:

$$\boxed{r = \frac{r_0}{e\cos\theta + 1}}$$

e לקוראים אקצנטריות (גודל שתמיד חיובי).
נחלק למקרים:
נביט במקרה בו $0 \le e < 1$. נחזור לקואורדינטות קרטזיות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ולכן:

$$r_0 = r(e\cos\theta + 1)$$
$$= re\cos\theta + r = ex + r$$

על כן:

$$r = r_0 - ex$$
$$r^2 = (r_0 - ex)^2$$
$$x^2 + y^2 = r_0^2 - 2r_0ex + e^2x^2$$
$$x^2(1-e^2) + 2r_0ex + y^2 = r_0^2$$

נעשה את הטריק הידוע: "השלמה לריבוע" ונגיע ל:

$$x^2(1-e^2) + 2r_0ex = (1-e^2)\left[x^2 + \frac{2r_0}{1-e^2}x\right] = (1-e^2)\left[x^2 + \frac{2r_0}{1-e^2}x + \frac{r_0^2e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{r_0^2e^2}{(1-e^2)^2}\right]$$
$$= (1-e^2)\left[\left(x + \frac{r_0e^2}{1-e^2}\right)^2 - \frac{r_0^2e^2}{(1-e^2)^2}\right]$$

ובסה"כ:

$$(1-e^2)\left[\left(x + \frac{r_0e^2}{1-e^2}\right)^2 - \frac{r_0^2e^2}{(1-e^2)^2}\right] + y^2 = r_0^2$$

נעביר אגף:

$$(1-e^2)\left(x + \frac{r_0e^2}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = r_0 + \frac{r_0^2e^2}{1-e^2} = \frac{r_0^2}{1-e^2}$$

ובסה"כ:

$$\frac{\left(x + \frac{r_0e^2}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{r_0}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r_0^2}{1-e^2}\right)} = 1$$

כלומר קיבלנו משוואת אליפסה! הצורה הקנונית של אליפסה:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

כאשר:

$$a = \frac{r_0}{1-e^2}$$
$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}$$

וברור כי $a > b$. ל a נקרא ציר ראשי ולb ציר משני.
במקרה בו $e > 1$ יש זוויות בהן המכנה מתאפס:

$$e\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1/e$$

בזוויות הללו $r \to \infty$, ותאלצו להאמין (TRUST ME BRO) שבמקרה זה המסלול יוצא היפרבולה.
ומה קורה כאשר $r = 1$? פרבולה (ושוב תצטרכו להאמין לי).
מה האנרגיה במקרה זה:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

לא נעשה את החישוב, אך אפשר להגיע לצורה:

$$= \frac{m^3k^2}{2L^2}(e^2 - L)$$

לסיכום:

המסלול	e	E
מעגל	0	$-\frac{m^3k^2}{2L^2}$
אליפסה	$0<e<1$	$E<0$
פרבולה	$e=1$	$E=0$
היפרבולה	$e>1$	$E>0$

טבלה 3: המסלול המתקבל מהאקצנטריות והאנרגיה של המערכת

למעשה אלו חתכי חרוט!

כעת ננסח ונוכיח את חוקי קפלר:

משפט 7.12 (חוקי קפלר:)**.**

- כוכבי הלכת נעים באליפסה סביב השמש - כאשר השמש נמצאת באחד המוקדים של האליפסה (תזכורת: אליפסה היא אוסף הנקודות שמרחקן מ2 נקודות קבועות (הנקראות מוקדים) קבוע. שימו לב שאם שתי הנקודות שוות נוצר מעגל)
- שטחים שווים בזמנים שווים: השטח שהגוף מכסה מפרק זמן ע"י שתי נק' על האליפסה ומוקד קבוע בזמן:



איור 7.1: השטח שהגוף מכסה במקטע זמן. השטח (A) המתקבל קבוע בזמן. דהיינו: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0$

- אם נסמן את $\overline{r}$ את המרחק הממוצע של הכוכב מהשמש, ואת T להיות זמו המחזור של הקפת הכוכב סביב השמש. אזי:

$$\frac{T^2}{\overline{r}^3}=C$$

כאשר קבוע זה נכון לכל הכוכבים במערכת השמש. בפרט, לשני כוכבים:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3}=\frac{T_2^2}{r_2^3}$$

הוכחה. את החוק הראשון הוכחנו בעזרת חוק הגרביטציה של ניוטון.
נוכיח את החוק השני תחת ההנחה שמדובר בכוח מרכזי. השטח שכיסה הגוף בזמן $\mathrm{d}t$ הוא שטח המשולש הנוצר מהוקטורים $\vec{v}\mathrm{d}t$ ו $\vec{r}$. נשים לב שהמכפלה הוקטורית הינה שטח המקבילית. וע"כ שטח המשולש:

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|\mathrm{d}t \iff \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|=\frac{|\vec{L}|}{2m}$$

אבל זהו גודל קבוע כי התנ"ז נשמר.
נוכיח את החוק השלישי עבור תנועה מעגלית (אבל זה עדיין נכון להוכחה בתנועה אליפטית).
נסמן את השמש ב M_S ואת מסת הכוכב ב m, ואת המרחק בינהם להיות R.
לפי החוק השני של ניוטון:

$$\sum F=ma$$

$$\frac{GM_Sm}{R^2}=m(\ddot{r}+r\omega^2)$$

(מדובר בגדלים חיוביים, וע"כ חייב לדרוש סכום אחרת סתירה) אבל התנועה מעגלית:

$$\frac{GM_Sm}{R^2} = mR\omega^2$$

$$\frac{GM_S}{R^2} = R\omega^2$$

אבל $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ולכן:

$$\frac{T^2GM_S}{R^3} = 4\pi^2$$

ולכן:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

וגודל זה זהה לכל כוכב. הידד! לקבוע זה קוראים לעיתים קבוע קפלר. ■

נעיר כי מבחינה היסטורית - גילו החוקרים בתחילת המאה ה 20 שהתנועה של כוכב חמה מעט מוזר, שכן נראה שהאליפסה "מוזזת" מעט בכל חזרה - מה שקשה על חוקי קפלר ועל חוקי ניטון. מי שניסח את החוקים הנכונים יותר היה אלברט איינשטיין בתורת היחסות הפרטית.

עוד הערה לגבי הניתוח שלנו: הניתוח שלנו היה לא מדוייק כי לא התייחסנו לתנועה של השמש תוך כדי תנועת כוכב הלכת סביבה. מנגד, אם נביט במערכת הכוללת את שתי המסות (הבעיה הדו גופית) - היא סגורה וכן הוכחנו שמרכז המסה נע במהירות קבועה. מתוך מערכת מרכז המסה, מרכז המסה נראה במנוחה:

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{M_S\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M_S + m} = \text{Constant}$$

נקבע את ראשית הצירים כמרכז המסה. לכן:

$$\frac{M_S\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M_S + m} = 0 \iff \vec{r}_2 = -\frac{M_S}{m}\vec{r}_1$$

כעת נכתוב את משוואת הכוחות על כל אחד מן הגופים:

$$\frac{GM_Sm}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = M_S\ddot{\vec{r}}_1$$

(כאשר שימו לב כי $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ הוא וקטור יחידה בכיוון ההעתק) ולכן:

$$\frac{GM_Sm}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = M_S\ddot{\vec{r}}_1$$

ובאופן שקול:

$$-\frac{GM_Sm}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m\ddot{\vec{r}}_2$$

(כי הוא נע בכיוון הנגדי ל M_S). לכן:

$$(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = \left(\frac{Gm}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + \frac{GM_S}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

נגדיר $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. לכן:

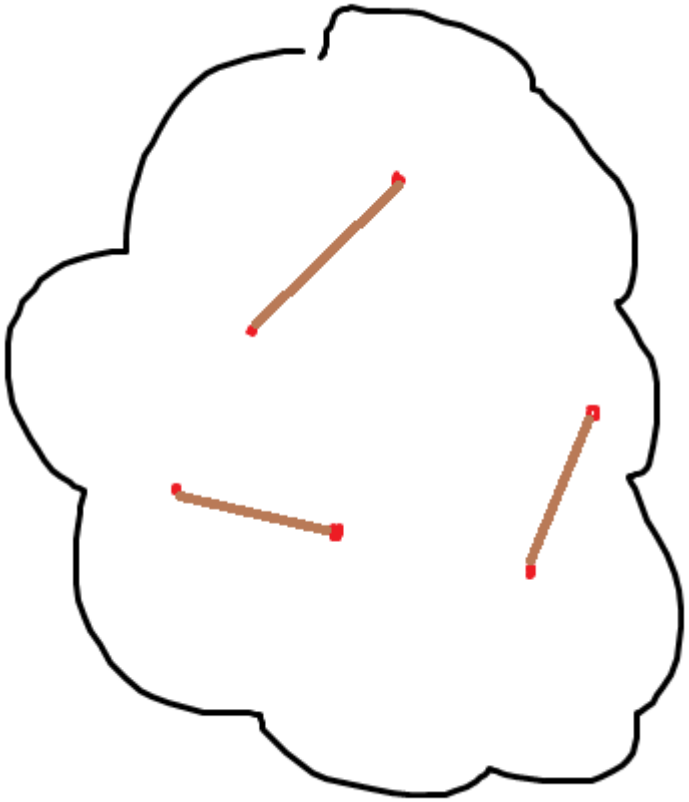
$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G}{r^2}\vec{r}(M + m) = -\frac{G(M + m)}{r^2}\hat{r}$$

(שימו לב כי $\hat{r}$ הוא הגודל כפול וקטור יחידה ומכאן r^2) כלומר ההפרש מקיים את המשוואה של גוף אחד, שנתון להשפעת מסה בגודל $M + m$. מכאן אפשר לפתור אותה באמצעות הכלים דלעיל - ומשם להגיע לפתרון של שני הגופים.

מסקנה: הבעיה הדו גופית ניתנת לתרגום לבעיה חד גופית שאותה פתרנו. לפיכך זוהי בעיה שהיא גם כן פתירה.

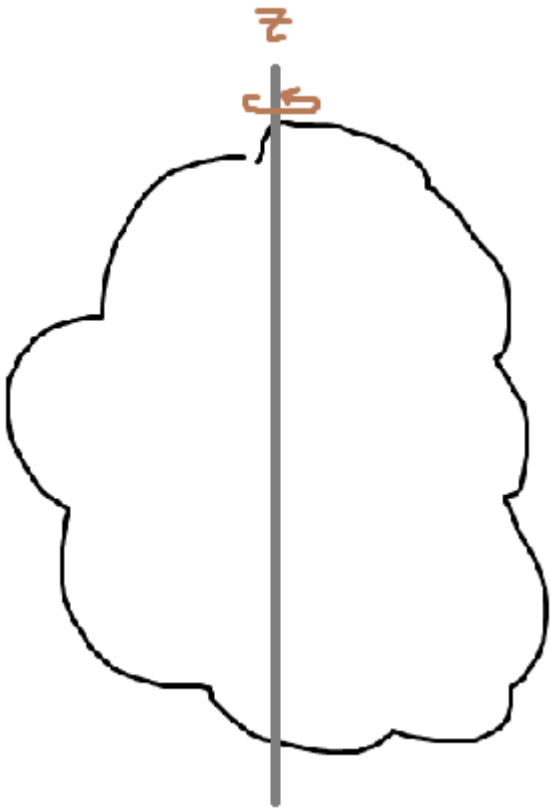
8 גוף קשיח

גוף קשיח הוא גוף המורכב מהמון חלקיקי מסה קטנים, והמרחק בין אלמנטי המסה קבוע לאורך הזמן (הגוף לא מתכווץ או מתמתח, כלומר ללא עיוותים).
התכונה ההפוכה היא גוף אלסטי, שלא נדבר עליו במסגרת קורס זה.



8.1 מומנט התמד

אנחנו בעיקר נעסוק בגופים קשיחים שמסתובבים סביב ציר בעל כיוון קבוע במרחב (נהוג לקרוא לציר הסיבוב z).



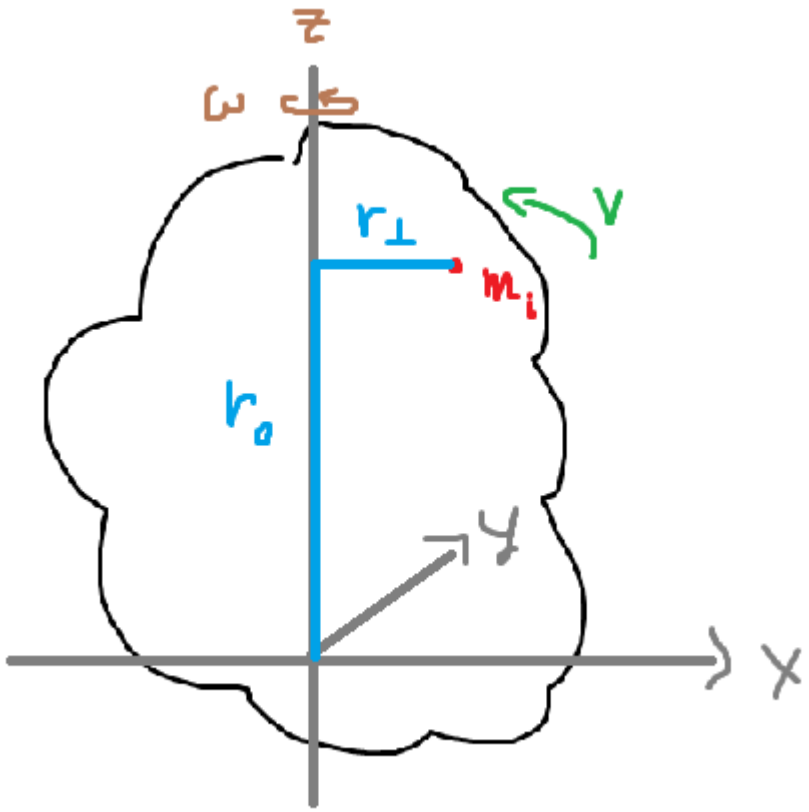
נחשב את המהירות של אלמנט מסה, בגודל m_i בגוף הקשיח. נעביר אנך מהמסה אל הציר, נקרא לגודלו $r_\perp$. לכן אם הגוף נע במהירות זוויתית ω, ניתן להשתמש בקואורדינטות פולריות ולקבל:

$$v_{m_i} = r_\perp \omega \hat{\theta}$$

והמיקום כמובן $r_\perp \hat{r}$.
נרצה לחשב את התנע הזוויתי:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = (r_0\hat{z} + r_\perp \hat{x}) \times m_i(r_\perp \omega \hat{y}) = -m_i r_\perp \omega r_0 \hat{x} + r_\perp^2 \omega m_i \hat{z}$$

(ראו איור)



ולכן רכיב z של התנ"ז:

$$L_{i,z} = r_\perp^2 \omega m_i$$

אם נעשה זאת לכל אלמנטי המסה, נקבל שהתנ"ז הכולל בציר z:

$$L_z = \sum m_i r_{i,\perp}^2 \omega = \left(\sum m_i r_{i,\perp}^2\right) \omega$$

לגודל הזה קוראים <u>מומנט התמד</u> או <u>מומנט אינרציה</u>:

$$I = \sum m_i r_{i,\perp}^2$$

כאשר מדובר בגוף בדיד. בגוף רציף עוברים לאינטגרל:

$$I = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \iiint (x^2 + y^2) \mathrm{d}m$$

(שימו לב כי זהו נפח הגוף, וכן ש $x^2 + y^2$ הוא גודל ההיטל בריבוע של $r_\perp$). ולכן באופן כללי מתקיים עבור סיבוב סביב ציר ה z:

$$L_z = I\omega$$

למעשה, אפשר גם לחשוב על מומנט התמד כהקבלה לנוסחת התנע $p = mv$, רק כאשר מדובר בתנועה סיבובית.

נפתור שאלות חישוב של מומנט התמד:

דוגמה 8.1. חשבו את מומנט ההתמד של טבעת אחידה ברדיוס R בעלת מסה M סביב ציר העובר במרכזה ומאונך אליה.



פתרון. המרחק בריבוע מהציר הוא R^2. על כן:

$$I = \int R^2 \mathrm{d}m = R^2 \int \mathrm{d}m = MR^2$$

דוגמה 8.2. חשבו את ממומנט ההתמד של דיסקה אחידה ברדיוס R ובעלת מסה M.

פתרון. הצפיפות תהיה $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ (המסה חלקי כל השטח):

$$I = \iint (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \iint \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \rho 2\pi \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

דוגמה 8.3. חשבו את מומנט האינרציה של כדור מלא ברדיוס R ומסה M.

פתרון. נחשב:

$$I = \iiint (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \iiint \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_{-R}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho r^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho\cdot 2\pi \int_{-R}^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi\rho\int_{-R}^{R}\frac{(R^2-z^2)^2}{4}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\rho}{4}\cdot\ R^4 z - 2R^2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\Big|_{-R}^{R}$$

זכרו כי:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

והתוצאה היא $\frac{2}{5}MR^2$, אשאיר את החישוב לקוראים הנחושים.

דוגמה 8.4. חשבו את מומנט ההתמד של מוט באורך L ומסה M.

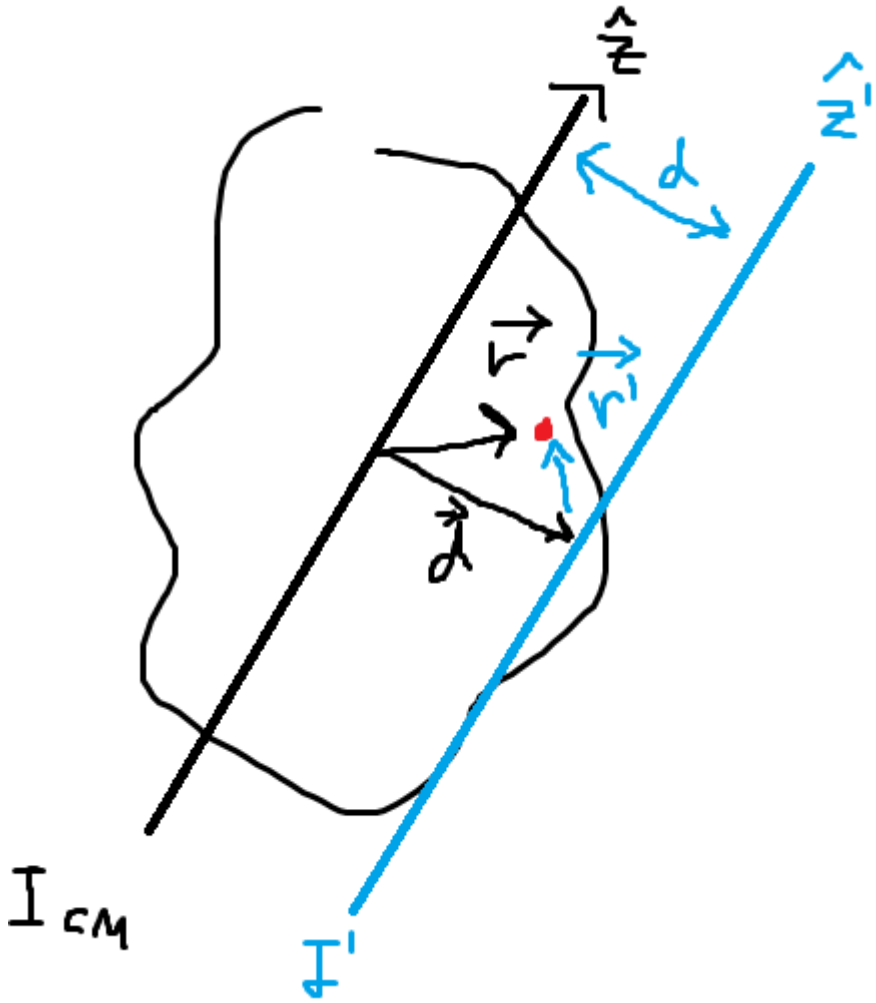
פתרון. הצפיפות הינה $\rho = M/L$. נחשב:

$$I = \int x^2 \mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} \rho x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{2}{3}\rho\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{M}{L}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{ML^2}{12}$$

משפט 8.5 (משפט הציר המקביל, משפט שטיינר)**.** אם I_{CM} הוא מומנט התמד סביב שעובר דרך מרכז המסה, ו I' הוא המומנט התמד ביחס לציר מקביל ל I_{CM} במרחק d, אזי:

$$I' = I_{\text{CM}} + Md^2$$

הוכחה. נגדיר את ראשית הצירים במרכז המסה. נסתכל על אלמנט מסה עם וקטור מיקום $\vec{r}$ יחסי למרכז המסה. ניקח גם את $\vec{d}$, וקטור המחבר בין אלמנט המסה בציר של מרכז המסה לציר המקביל. מהנקודה שיצרנו ניצור וקטור נוסף המחבר למסה, נסמנו $\vec{r'}$



ולכן (נניח בדיד, המקרה עבור אינטגרל זהה):

$$I' = \sum m_i r_{i\perp}'^{\,2} = \sum m_i[(\vec{r} - \vec{d})\hat{d}]^2$$

(חיסור וקטורים, כאשר $\hat{d}$ וקטור יחידה בכיוון $\vec{d}$):

$$= \sum m_i[\vec{r}\hat{d} - \vec{d}\hat{d}]^2 = \sum m_i[\vec{r}\hat{d} + \vec{d}\hat{d} - 2(\vec{r}\hat{d})(\vec{d}\hat{d})]$$

$$= \sum m_i(\vec{r}\hat{d})^2 + \sum m_i d^2 - 2(\vec{d}\hat{d})(\sum m_i\vec{r})\hat{d}$$

אבל:

$$\sum m_i(\vec{r}\hat{d})^2 = I_{\text{CM}}$$

$$\sum m_i d^2 = Md^2$$

ונוכיח שהביטוי הימני מתאפס.

$$\sum m_i\vec{r} = \frac{\vec{r}_{\text{CM}}}{\sum m_i}$$

אבל הנחנו ש $\vec{r}_{\text{CM}} = 0$ ולכן הביטוי שווה לאפס. ■

דוגמה 8.6. מהו מומנט ההתמד של המוט סביב ציר בקצהו?

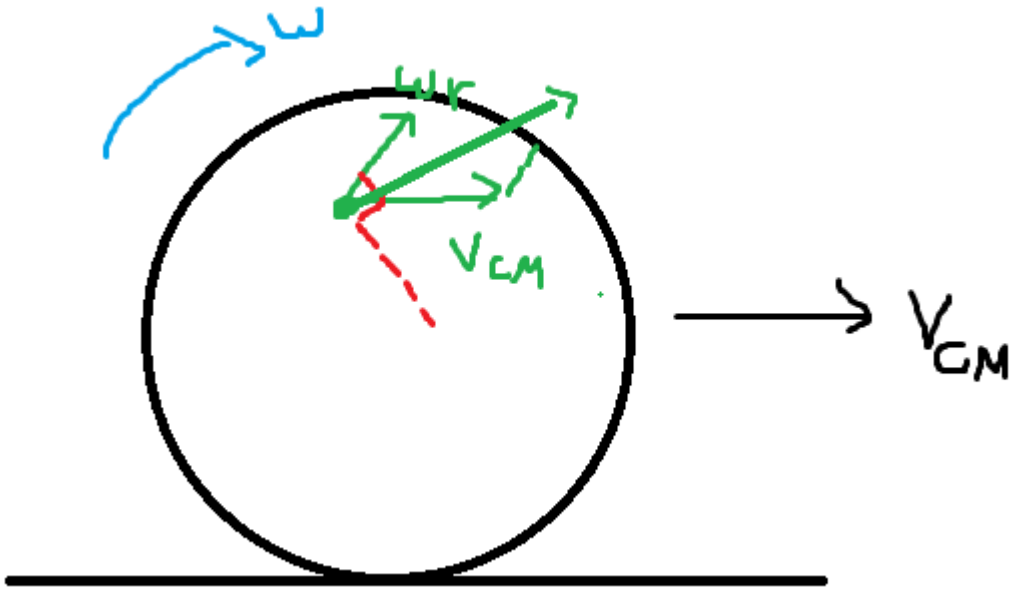
פתרון. אנחנו חישבנו בדוגמה 8.4 את מומנט ההתמד סביב מרכז המסה (הציר באמצע). ולכן:

$$I_2 = I_1 + Md^2 = \frac{ML^2}{12} + M \cdot \frac{L^2}{2^2} = \frac{4ML^2}{12} = \frac{1}{3}ML^2$$

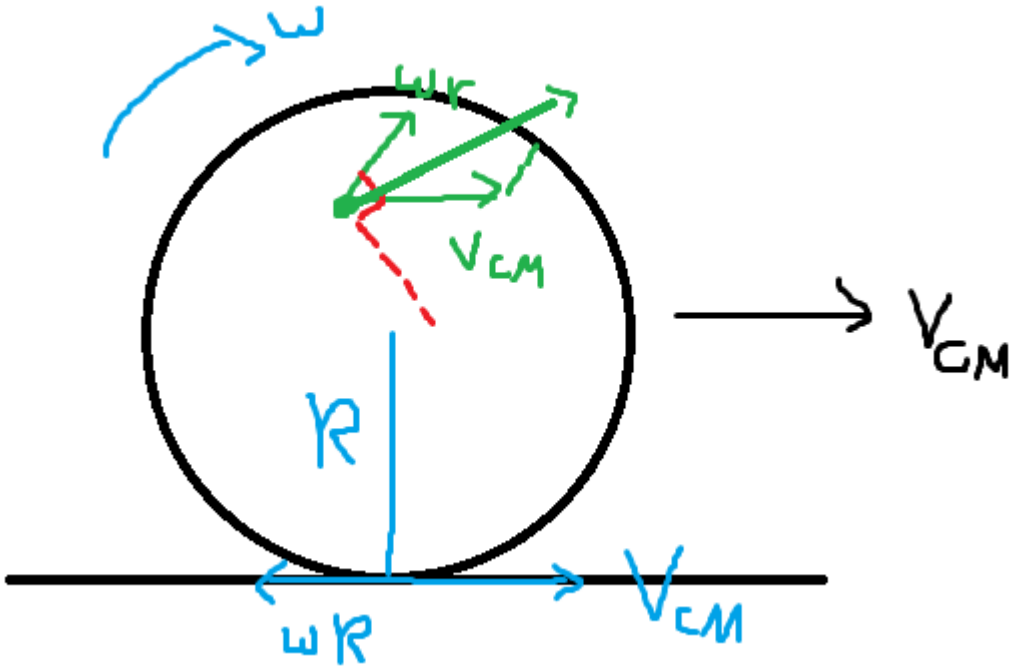
באופן כללי, תנועת גוף קשיח מורכבת מסיבוב סביב ציר מסוים ותזוזה בכיוון קבוע. את החלק של התנועה הקווית נקבע לפי חוקי ניוטון ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$). את החלק של התנועה הזוויתית נקבע לפי משוואת המומנטים ($\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$, כאשר $\vec{\alpha}$ תאוצה זוויתית).

8.2 גלגול ללא החלקה

נביט בתנועה של גלגל המורכב מהמון אלמנטי מסה קטנים המתגלגל על משטח. מצד אחד הוא נע יחסית למרכז המסה בתנועה בקבועה. מנגד, כיוון שהגוף נע גם בתנועה מעגלית, יש לו גם מהירות משיקית רגעית (התלויה ברדיוס). על כן, התנועה של אלמנט המסה תהיה בכיוון סכום המהירויות.



בפרט, אם נביט בתחתית הגלגל:

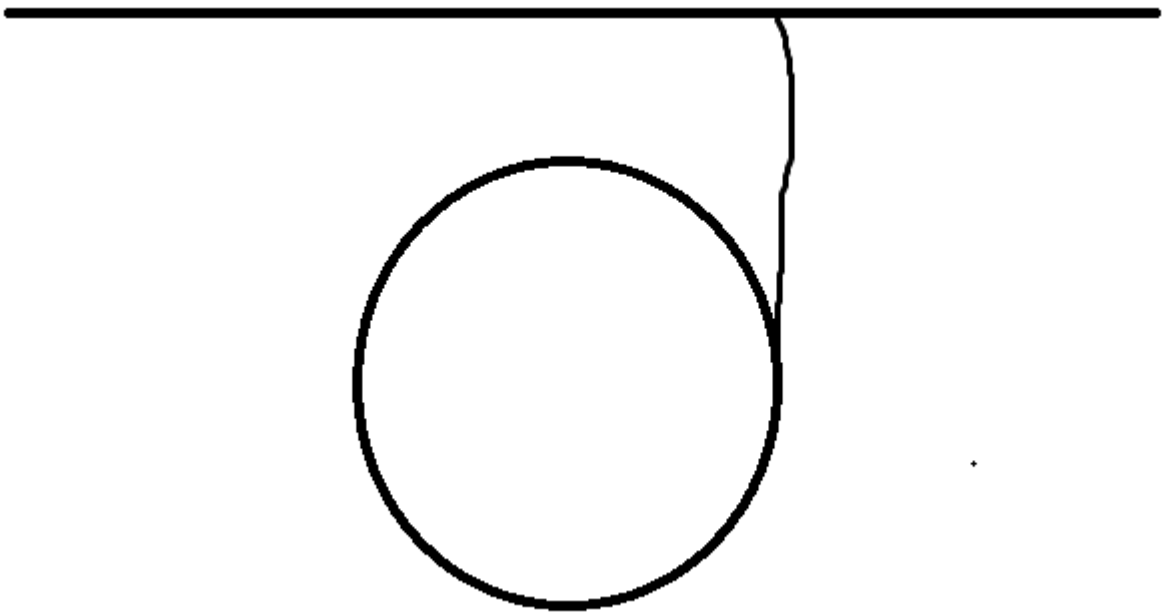


לכן אפשר לבדוק מהו יחס המהירות של הנקודת ההשקה של הגלגל עם הרצפה יחסית לרצפה. אם המהירות השקולה חיובית, הגוף מחליק ימינה. אם שלילית, הגוף מחליק שמאלה. אחרת - הגוף אינו מחליק! זאת אומרת שיחסית לרצפה, נקודת ההשקה של הגוף אינה נעה. על כן, אם יש חיכוך בין הרצפה לגלגל - החיכוך בנקודת ההשקה יהיה סטטי. ונשים לב כי עבודה של חיכוך סטטי:

$$W = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} \mathrm{d}t = 0$$

שכן נקודת ההשקה לא נעה יחסית לרצפה. על כן אין החיכוך מפריע לאיבוד אנרגיה.

דוגמה 8.7. דיסקה בעלת רדיוס R ומסה M מחוברת לחוט שמלופף אליה. מהי התאוצה הקווית הזוויתית של הדיסקה?



פתרון. אם לא נאמר אחרת, נניח כי המסה מתפלגת באופן אחיד. הכוחות הפועלים על הדיסקה הם הכבידה (Mg) והמתיחות (T) נזכור כי הכוח פועל ממרכז המסה. על כן:

$$Ma = \sum \vec{F} = T - Mg$$

(נקבע את הצירים כלפי מעלה) משוואת המומנטים:

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

ידוע שלדיסקה מומנט התמד הוא $I = \frac{1}{2}MR^2$. כמו כן:

$$\tau_{mg} = |\vec{r} \times -Mg\hat{y}| = 0$$

כי נגדיר את ראשית הצירים במרכז המסה. כמו"כ:

$$\tau_T = |\vec{r} \times \vec{T}| = |r|T \sin 90^\circ = RT$$

(חיובי כי T מעודד סיבוב נגד כיוון השעון). יש לנו 2 משוואות עם שלושה נעלמים. ניעזר באילוץ.
האילוץ יהיה שהגלגול של הדיסקה על החוט הוא ללא החלקה. ההנחה הזו סבירה ואנחנו נשתמש בה בקורס (אלא אם כן נאמר אחרת). לכן:

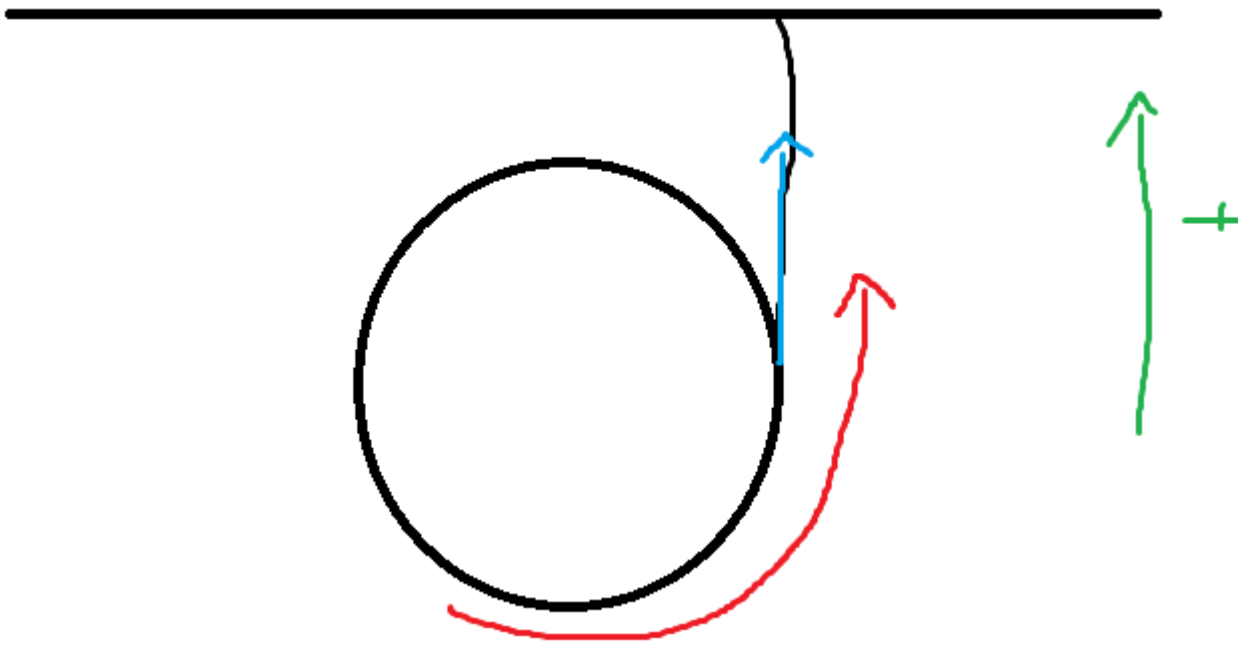
$$v = \omega R$$

ולכן:

$$a = \alpha R$$

צריך לבדוק שהסימנים נכונים! הגדרנו את התאוצה הקווית להיות כלפי מעלה, ועל כן התאוצה הקווית נגד כיוון השעון, ולכן נקבל שהמהירות בשלב מסויים תתלכד, כלומר עלינו להגדיר את הכיוון הפוך:

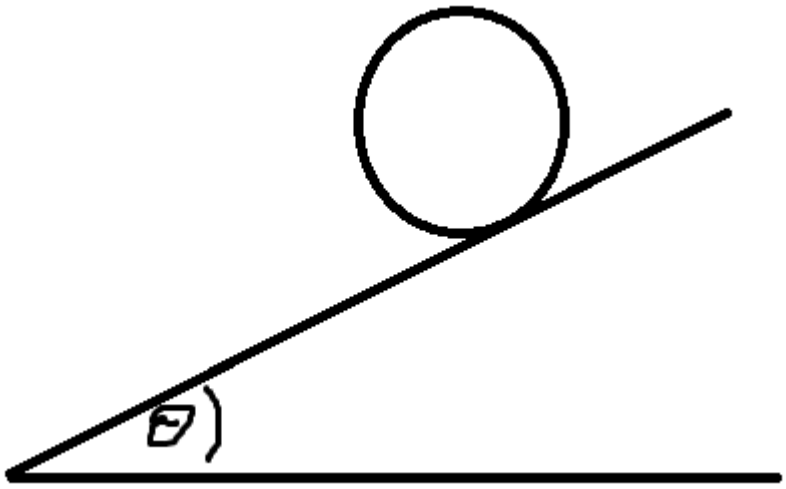
$$a = -\alpha R$$



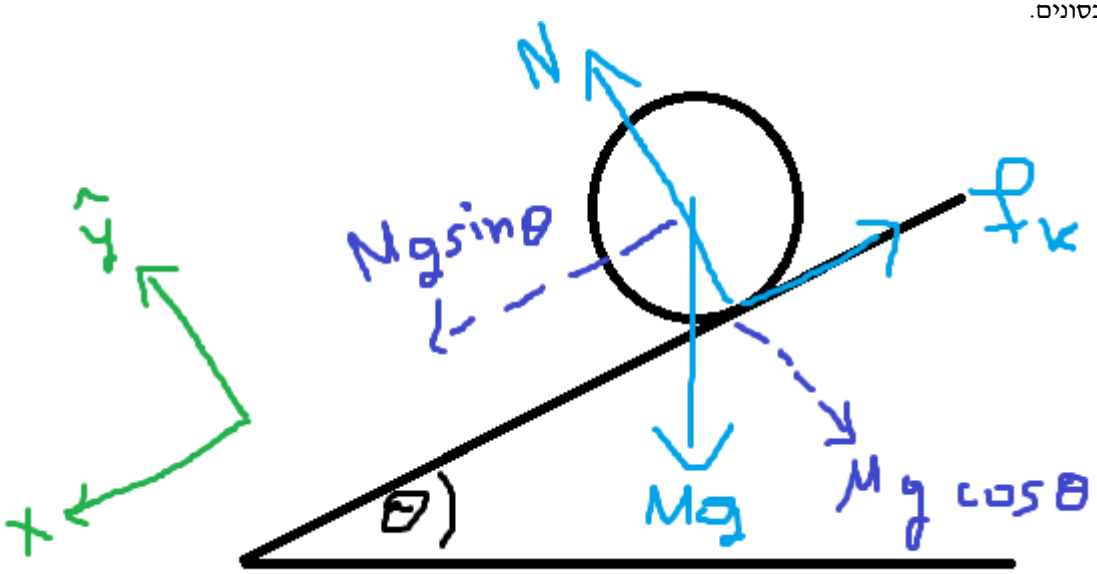
אפשר לפתור את שתי המשוואות ולקבל:

$$a = -\frac{2}{3}g, \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$$

דוגמה 8.8. גלגל שמסתו M ורדיוסו R מתגלגל במורד מישור משופע שזוויתו B. בינו למישור יש חיכוך עם מקדם חיכוך μ. ברגע $t = 0$ הגלגל מחליק על המישור במהירות v_0 ללא סיבוב. באיזה זמן t הגלגל יעבור למצב של גלגול ללא החלקה.



פתרון. הכוחות הפועלים על הגוף הם Mg (שיוצא ממרכז המסה), הנורמל (הפועל בנקודת ההשקה) וחיכוך קינטי (הפועל גם כן מנקודת ההשקה). נבחר צירים אלכסונים.



משוואת הכוחות בציר y:

$$\sum F_y = 0$$
$$N - mg\cos\theta = 0$$

משוואת הוכחות בציר x:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$Mg\sin\theta - f_k = ma_x$$
$$Mg\sin\theta - N\mu = ma_x$$
$$\iff a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$$

משוואת המומנטים:

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$\tau_N = |\vec{r}\times\vec{N}| = 0$$

(כי הזווית בינהם 180°). כמו"כ:

$$\tau_{mg} = |\vec{r} \times mg| = 0$$

(כי יחסית למרכז המסה r אפס). כמו"כ:

$$\tau_{f_k} = +Rf_k$$

(כי f_k מעודד סיבוב). לכן:

$$Rf_k = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{Rf_k}{I} = \frac{R\mu Mg\cos\theta}{\frac{1}{2}MR^2} = 2\frac{\mu g\cos\theta}{R}$$

כעת כשאין החלקה אז $V_{\text{CM}} = \omega R$. נמצא אותם:

$$v = \int a\mathrm{d}t = (g\sin\theta - \mu g\cos\theta)t + v_0$$

$$\omega = \frac{2\mu g\cos\theta}{R}t$$

(ומתחיל מ 0) לכן נבדוק מתי:

$$(g\sin\theta - \mu g\cos\theta)t + v_0 = \frac{2\mu g\cos\theta}{R}t$$

(קל לוודא שאכן מדובר בכיוונים שונים):

$$t = \frac{v_0}{3\mu\cos\theta - \sin\theta}$$

שימו לב כי f_k הוא זה שגורם לסיבוב - הרי הוא זה שמפעיל את הטורק היחיד על הגלגל.
עוד שאלה טבעית: מדוע יש זמן מסויים בו הגוף נע ללא החלקה? הרי זה לא מיד? נשים לב כי לא ייתכן שהנורמל יעבור במרכז המסה, ולכן במדרון משופע הנורמל נמצא במקום שיש לו מעין "אחיזה" על f_k כך שיבטל את הסיבוב. עלינו לשים לב שיש פתרון לבעיה רק אם המכנה חיובי, כלומר צריך להתקיים כי $3\mu\cos\theta > \sin\theta$, או $\mu > \frac{\tan\theta}{3}$.

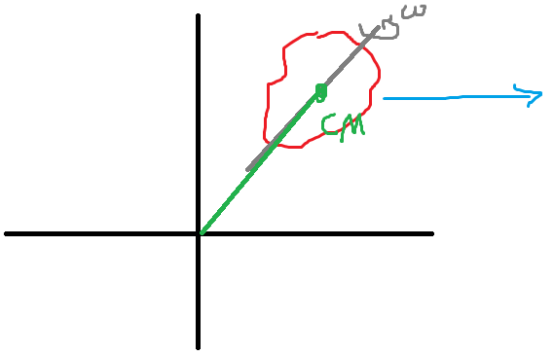
8.3 תנועה מורכבת

הראינו בעבר כי לגוף קשיח יש תנ"ז:

$$L = I\omega$$

(כאשר מדובר בתנ"ז של סיבוב הגוף סביב ציר)
כאשר הגוף נע כיחידה אחת גם במהירות v (V_{CM}) צריך להוסיף את התנ"ז עקב התנועה הקווית:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} + m\vec{R}_{\text{CM}} \times \vec{V}_{\text{CM}}$$



איור 8.1: תנועה של גוף סביב עצמו וגם בקו ישר

(כאשר $\vec{\omega}$ וקטור בכיוון המאונך למישור הסיבוב, לפי כלל יד ימין)

באופן דומה, האנרגיה בתנועה של גוף קשיח מורכבת מאלמנט הסיבוב והאלמנט הקווי:

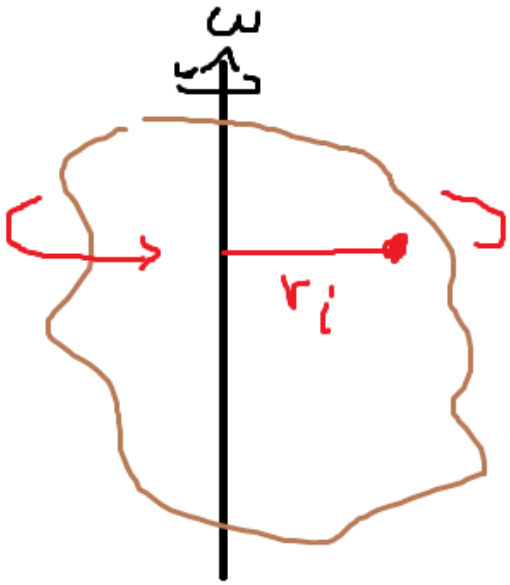
$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{\text{CM}}^2$$

הביטוי השמאלי מייצג את התנועה הסיבובית והימני את הקווית.
נוכיח את החלק הסיבובי.
יהי אלמנט מסה בגוף הקשיח. הוא מבצע תנועה מעגלית. לכן האנרגיה הכוללת היא סכום האנרגיות של החלקיקים:

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}m(\omega r_i)^2$$

(שכן זוהי המהירות בתנועה מעגלית)

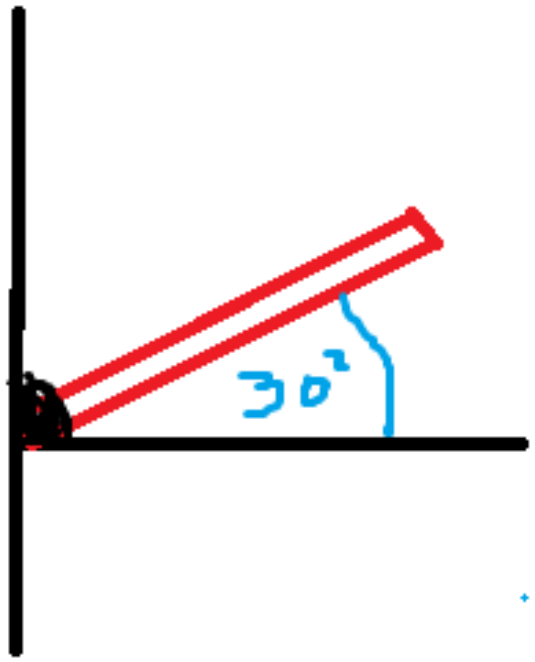
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum \underbrace{mr_i^2}_{=I} = \frac{1}{2}I\omega^2$$



איור 8.2: הסבר של ההוכחה לעיל. שימו לב שω זהה אצל כל אלמנטי המסה כי הגוף נע ביחד

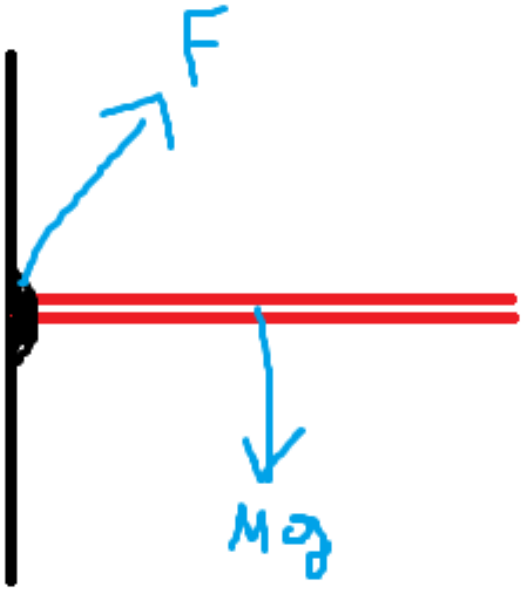
דוגמה 8.9. מוט באורך ℓ ומסה M מוחזק בקצהו ע"י ציר. שחררו את המוט מזוית $30°$.

1. מהי התאוצה הזוויתית של המוט כשהוא מגיע למצב אופקי?
2. מהי המהירות הזוויתית של המוט כשהוא מגיע למצב אופקי?
3. מהו הכוח מהציר כשהמוט מגיע למצב אופקי?



איור 8.3 : סרטוט של הבעיה

פתרון. כאשר הגוף מגיע למצב אופקי, פועלים עליו כוח מהציר וכוח Mg.



איור 8.4 : תרשים כוחות ברגע ההגעה למצב אופקי. איננו יודעים את המצב של F והוא סכמטי בלבד (כרגע)

נבחר את הראשית בתחילת המוט, על מנת שהטורק של הכוח (שאיננו יודעים אותו) יהיה אפס.
כעת :

$$\tau_{Mg} = -|\vec{r} \times F_{Mg}| = -r \cdot F_{Mg} \cdot \sin 90^\circ = -\frac{\ell}{2} Mg$$

(שימו לב שהנ"ל מינוס כי הוא נגד כיוון השעון, ונבחר את כיוון הסיבוב להיות עם כיוון השעון).
סה"כ:

$$-\frac{\ell}{2}Mg = I\alpha$$

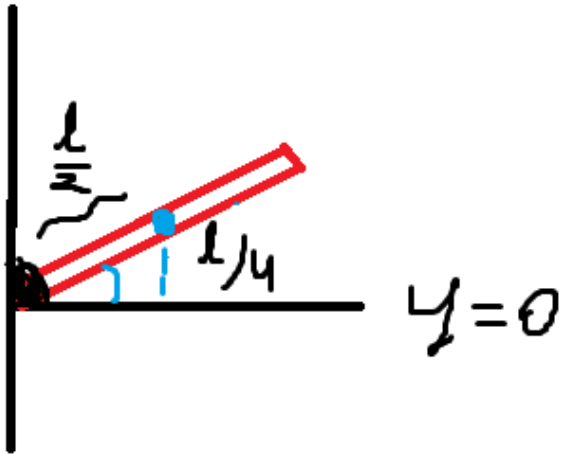
לפי משפט הציר המקביל, אפשר לחשב את מומנט ההתמד של I:

$$I = \frac{M\ell^2}{12} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{3}$$

ובסה"כ:

$$\alpha = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$$

הידד!
כעת לסעיף ב': הציר לא זז, ולכן ה $\mathrm{d}r$ (השינוי במיקום) שלה הוא 0 ועל כן אין הכוח לעיל מבצע עבודה. Mg כוח משמר ולכן יש שימור אנרגיה.
נשווה את האנרגיה בתחילה ובסוף. בהתחלה למוט יש רק אנרגיית גובה. מספיק לנו להסתכל על מרכז המסה, שכן אפקטיבית Mg שקול לכך שהוא פועל רק על מרכז המסה. מרכז המסה נמצא ב $\ell/2$ על המוט ועל כן הגובה שלו הוא $\frac{\ell}{4}$ מטריגו.



איור 8.5: הגובה של מרכז המסה הוא חצי מהיתר - כלומר $\ell/4$

$$E_{\text{start}} = Mg\frac{\ell}{4}$$

ובסוף:

$$E_{\text{end}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{3}\omega^2$$

$$\omega = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}$$

(כי הוא נע נגד כיוון השעון, ונגד כיוון הסיבוב)
שימו לב כי אם היינו קובעים את הראשית במרכז המסה, היה עלינו להתחשב גם בתנועה הקווית של מרכז המסה.
בשביל סעיף ג' נעשה משוואת כוחות רגילה:

$$\sum \vec{F_{\text{TOT}}} = M\vec{a}$$

$$\vec{F} - Mg\hat{y} = M\vec{a}$$

$$\vec{F} = M\vec{a} + Mg\hat{y}$$

בשביל התאוצה נשתמש בקואורדינטות פולריות:

$$= M\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}\right] + Mg\hat{y}$$

נסתכל על מרכז המסה שהיא נעה ברדיוס קבוע הלוא הוא $\ell/2$:

$$\vec{a} = -\frac{\ell}{2}\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\hat{r} + \frac{\ell}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\right)\hat{\theta} = -\frac{3}{4}g\hat{r} - \frac{3}{4}g\hat{\theta}$$

וברגע שהמוט אופקי:

$$= -\frac{3}{4}g\hat{x} - \frac{3}{4}g\hat{y}$$

ובסה"כ:

$$F = M\left(-\frac{3}{4}g\hat{x} - \frac{3}{4}g\hat{y}\right) - Mg\hat{y} = -\frac{3}{4}gM\hat{x} + \frac{1}{4}gM\hat{y}$$

כלומר הכוח נמצא ברביע השני.

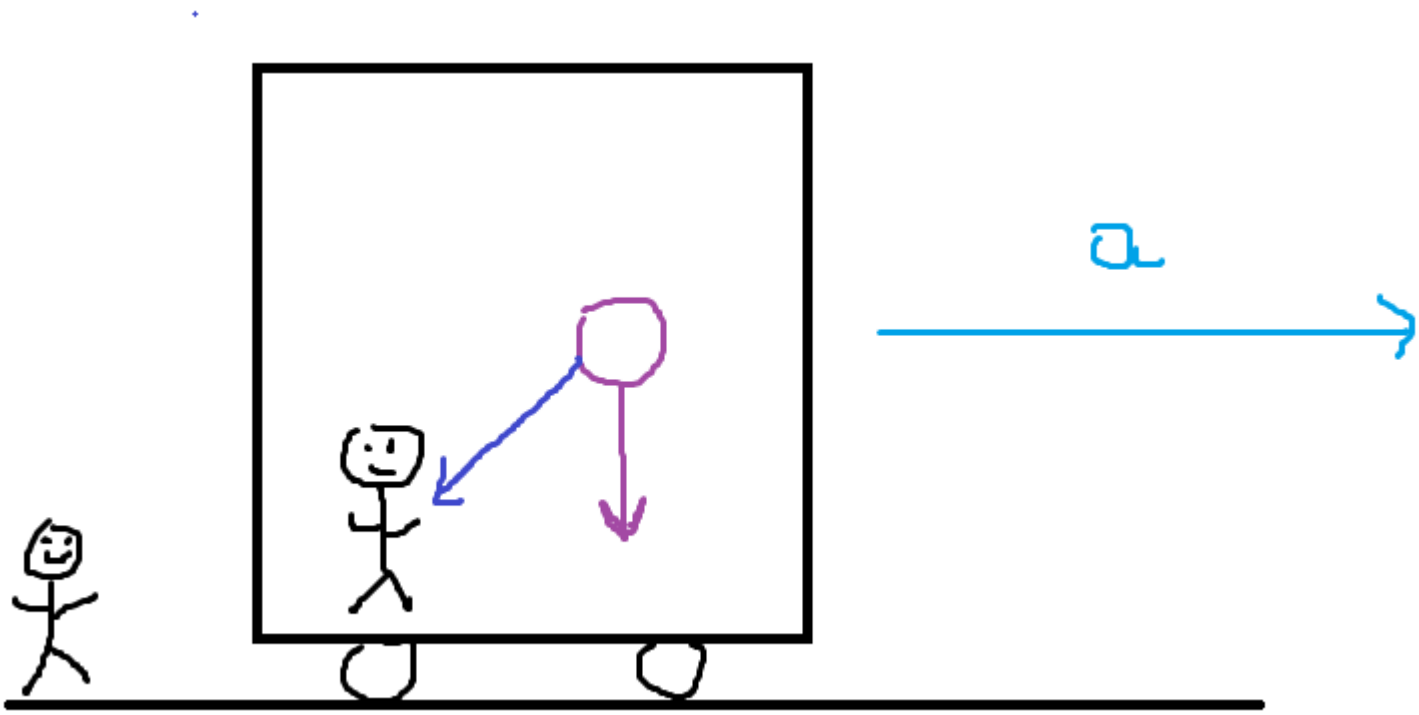
9 מערכות יחוס

9.1 מערכות אינרציאליות ולא אינרציאליות

כשאנחנו פותרים שאלות, הייתה לנו הנחה סמוייה שיש צופה מן הצד שמביט בנ"ל ואצלו נכונים חוקי ניוטון.
מנגד, צופה המסתכל בדרך אחרת יכול לראות נתונים אחרים.
צופה פיזיקלי הוא מה שמכונה "מערכת ייחוס"

הגדרה 9.1. מערכת ייחוס היא צופה פיזיקלי שצופה על המערכת.

דוגמה 9.2. קרונית מאיצה ימינה בתאוצה a (ב$t = 0$ מהירות הקרונית היא 0). יש אדם שמסתכל מצד שמאל. בתוך הקרונית יש אדם המפיל כדור.



איור 9.1: קרונית נעה ימינה. אדם משקיף על הקרונית מצד שמאל בעוד שאדם שבתוך הקרון גם כן משקיף. אצל האדם שמבחוץ רואה את התנועה הסגולה, בעוד שהאדם בקרון רואה את התנועה הכחולה.

בעיני הצופה על הקרקע, הכדור נופל בקו ישר למטה - שכן התנועה בעיניו היא חד מימדית (בציר y)
מבחינת הצופה שבתוך הקרון, הכדור נע שמאלה (בנוסף למטה) כי האדם מחובר לקרונית שהיא נוסעת. אבל נשים לב כי לא מופעל בציר ה x אף כוח!!!
ולכן כיצד הכדור יכול לזוז בכיוון הזה? אין מנוס מלומר שחוקי ניוטון לא תקפים עבור הצופה שבתוך הקרון.

מכאן אפשר להגדיר:

הגדרה 9.3. מערכת ייחוס אינרציאלית היא מערכת ייחוס בה חוקי ניוטון מתקיימים.
אם חוקי ניוטון לא מתקיימים, המערכת נקראת לא אינרציאלית.

למעשה אפשר בניסוי די פשוט בכדי לקבוע באיזה מערכת אנחנו. אם ניקח עצם ונבודד אותו, וינוע – אזי מדובר במערכת לא אינרציאלית.

המטרה שלנו: להציל את חוקי ניוטון!
עבור הצופה האינרציאלי:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

עבור הצופה בקרונית:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

כאשר $\vec{a}$ הינה התאוצה של הכדור יחסית לקרקע, אבל הצופה הלא אינרציאלי רואה את הכדור בתאוצה ביחס לקרונית:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \tilde{\vec{a}}$$

כאשר $\tilde{\vec{a}}$ תאוצת הקרונית. לכן:

$$\vec{a} = \tilde{\vec{a}} + \vec{a}'$$

ולכן:

$$\sum \vec{F} = m\tilde{\vec{a}} + m\vec{a}'$$

ונקבל:

$$\sum \vec{F} - m\tilde{\vec{a}} = m\vec{a}'$$

כלומר לצופה בקרונית אפשר להוסיף מעין "כוח" $-m\tilde{\vec{a}}$ למערכת ולקבל:

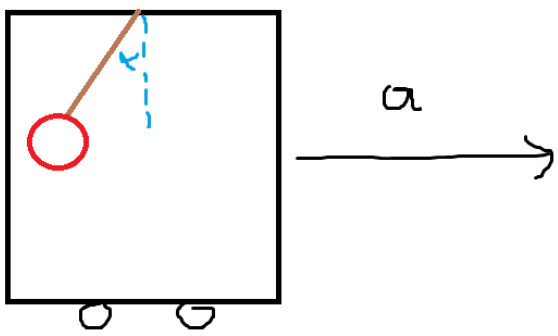
$$\sum \vec{F}_{\text{train}} = m\vec{a}$$

מסקנה 9.4. הצופה בקרונית צריך להוסיף כוח מדומה:

$$-m\tilde{\vec{a}}$$

שהיא תאוצת הקרונית
בשביל להמשיך להשתמש בחוקי ניוטון.

דוגמה 9.5. בתוך קרונית תלוי גוף על חוט בעל אורך קבוע. הקרונית מאיצה בתאוצה a ימינה. מהי הזווית α שתופס החוט?



איור 9.2: תרשים של הבעיה

פתרון. נביט כצופה במערכת צירים אינרציאלית ונביט לאחר מכן במערכת צירים שאינה אינרציאלית.
אם נביט מצד שמאל, נראה שעל הגוף פועלים הכוחות $-mg$ ומתיחות T. כיוון שהזווית קבועה, נראה תנועה קבועה בציר y אך תאוצה בציר x (כי הכדור מחובר לקרונית שמאיצה). סה"כ ניתן לפרק לרכיבים:

$$\sum F_x = ma$$

$$T\sin\alpha = ma$$

וכמו"כ:

$$\sum F_y = 0$$

$$T\cos\alpha - mg = 0$$

ובסה"כ:

$$\tan\alpha = \frac{a}{g}$$

כעת עבור מערכת צירים לא אינרציאלית, הנמצאת בתוך הקרונות מופעל כוח מדומה הפועל נגד כיוון התנועה של הצופה (כדי לאזן). יחסית לצופה שבתוך הקרונית - הגוף לא נע בכלל! ולכן תאוצתו 0 גם בציר x:

$$\sum F_x = 0$$

$$T\sin\alpha - ma = 0$$

$$T\sin\alpha = ma$$

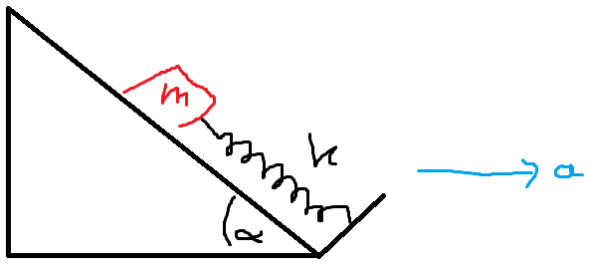
$$\sum F_y = 0$$

$$T\cos\alpha - mg = 0$$

וביחד קיבלנו בדיוק את אותה התוצאה כמו בסעיף הקודם. היופי הוא שבניתוח פה הוספנו כוח למערכת ושינינו את התאוצה. שימו לב שתוצאה זו אינה מפתיעה אותנו, הרי זווית היא גודל פיזיקלי שאינו תלוי בצופה!

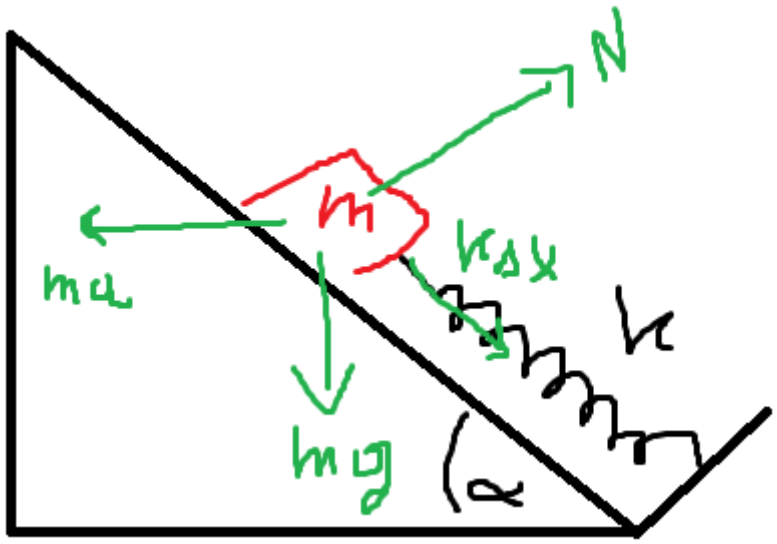
נשים לב שעל אף שניסינו לתקן את החוק השני בעזרת כוח מדומה, את החוק השלישי של ניוטון לא ניתן לתקן. זאת מהסיבה שהכוח שהכנסנו שרירותית אינו בא בגלל גורם פיזיקלי אמיתי - ולכן אין לו נגדי.

דוגמה 9.6. מדרון משופע בזווית α נע בתאוצה a ועליו מונחת מסה, שמחוברת לקפיץ עם קבוע קפיץ k כמתואר. מצאו את התכווצות או התארכות הקפיץ בשיווי משקל.



איור 9.3: תרשים הבעיה

פתרון. לא יהיה כיף לפתור את זה במערכת אינרציאלית. נרצה לפתור במערכת המדרון בתוספת של כוח מדומה.



איור 9.4: תרשים כוחות של הבעיה

שימו לב שהמונח של "שיווי משקל" לא מוגדר בכלל עבור מערכת צירים אינרציאלית כמו פה! הרי מבחינת צופה שנמצא מצד שמאל הגוף תמיד מאיץ! והיאך יש שיווי משקל! אלא ללמדך שמדובר במערכת המדרון שם המסה בוודאי תיתכן שתהיה במנוחה. לאחר פירוק לרכיבים (למערכת צירים אלכסונית על המדרון), מגיעים:

$$\sum F_x = 0$$

$$k\Delta x + mg\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0$$

$$\Delta x = \frac{mg\cos\alpha - mg\sin\alpha}{k}$$

וואי זה היה מהיר! איזו הקלה ☺

9.2 מערכות מסתובבות

עד כה דיברנו על מערכות שנעות בקו ישר. מה עם תנועה מעגלית? נניח למשל שיש גוף שנמצא על קרוסלה מסתובבת. נרצה לנתח את הגוף מתוך הקרוסלה. נשים את הקרוסלה במערכת צירים. לגוף יש מהירות $\vec{V}_r$, שהיא יחסית למערכת המסתובבת. $\vec{r}$ הוא וקטור המיקום של הגוף ו $\vec{\omega}$ המהירות הזוויתית של המערכת.

מתברר שלמערכת הזו יש שני כוחות מדומים, ועל צופה בתוך המערכת להוסיף אותם:

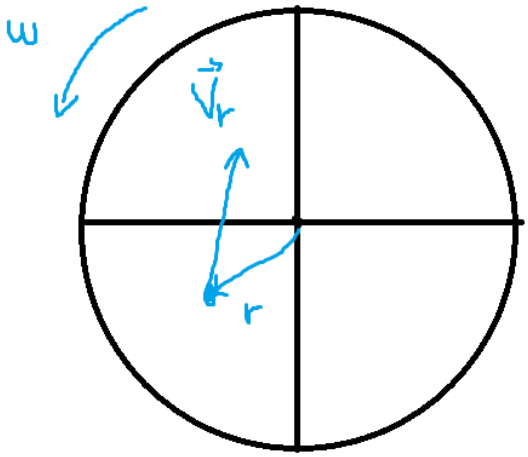
הכוח האחד:

$$\vec{F}_{\text{CENT}} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

נקרא הכוח הצנטריפוגלי, והכוח הנוסף:

$$\vec{F}_{\text{COR}} = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_r$$

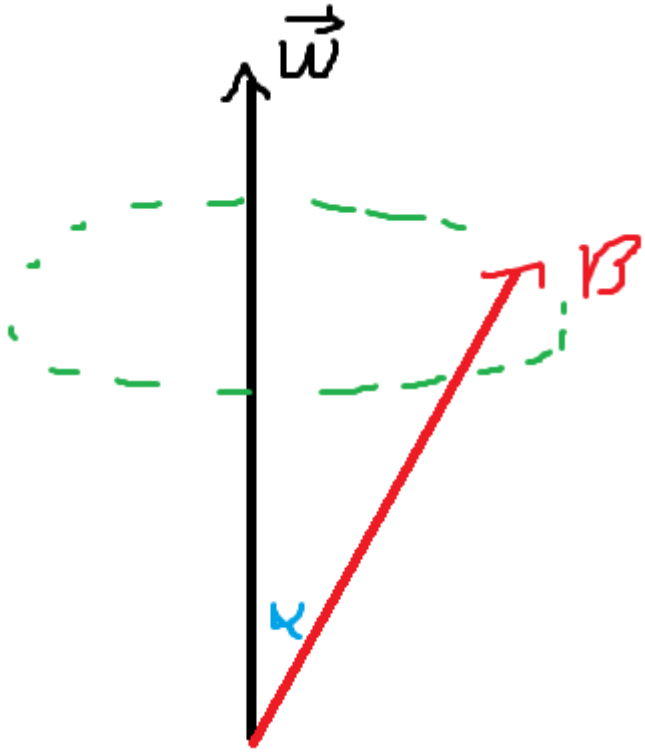
נקרא כוח קורילוס



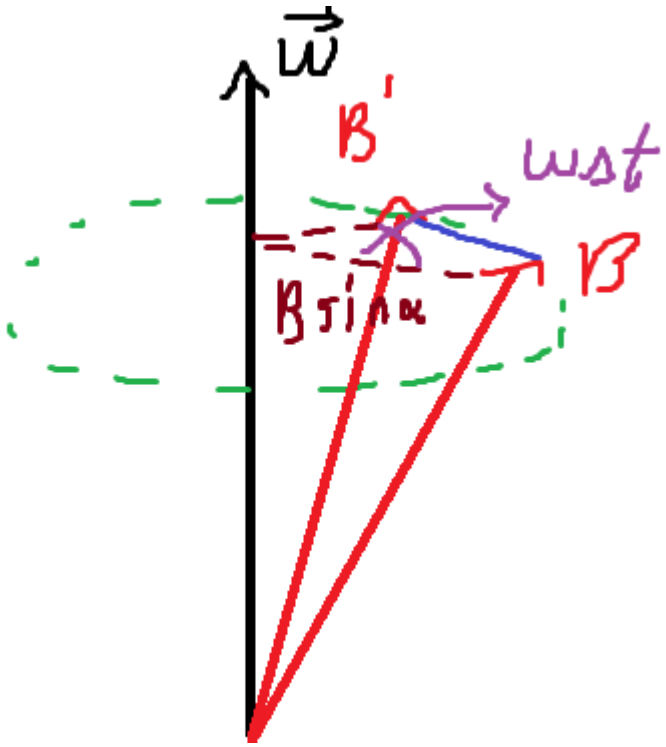
איור 9.5 : הצגה של הרכיבים בניתוח הלא אינרציאלי

בכדי להוכיח, נחשב חישובי עזר.

נביט בוקטור $\vec{B}$ המסתובב סביב ציר סיבוב $\vec{\omega}$, ונרצה למצוא את נגזרתו בזמן.



נביט ב$\vec{B}$ ברגע t ובזמן $t+\Delta t$, נשאיף את $\Delta t \to 0$ ונקבל המבוקש. נזכור כי α קבוע ולכן רדיוס הסיבוב הינו $B\sin\alpha$ והוא קבוע בכל זמן. השינוי בין הוקטורים הוא הקשת המחברת בינהם, כמתואר באיור :



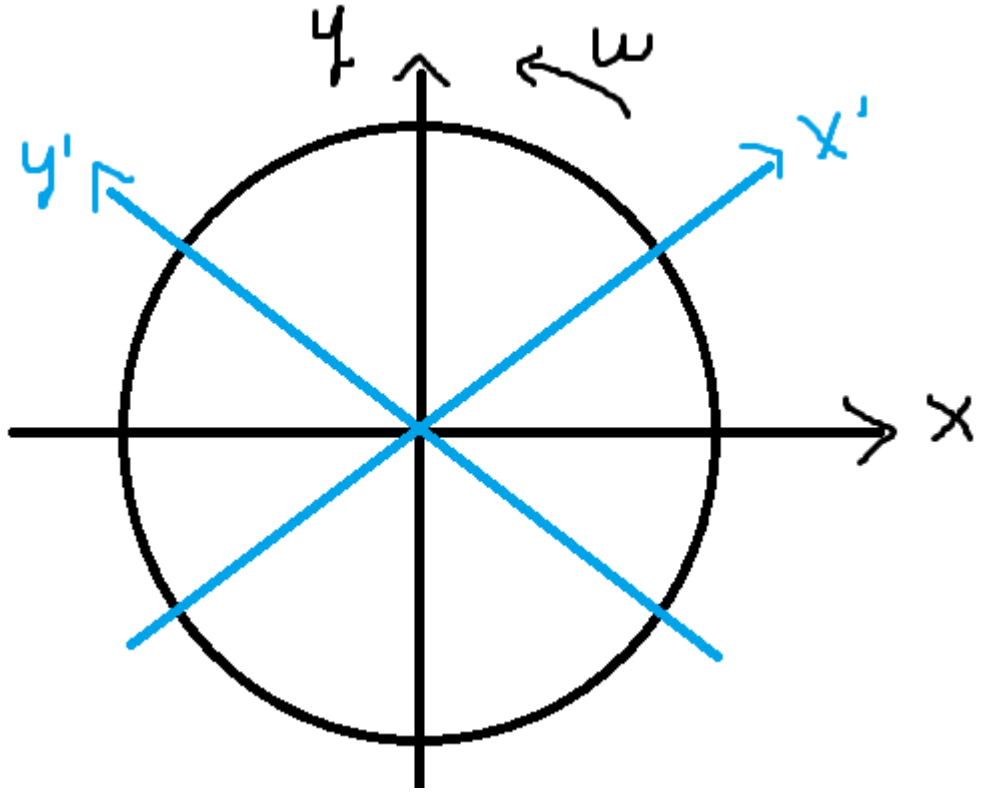
ברדיאנים, אורך הקשת המחברת (הכחולה שבאיור) מתקיים כי $|\Delta B| = B\sin\alpha\cdot\omega\Delta t$ (רדיוס כפול הזווית). ולכן:

$$\frac{|\Delta B|}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\omega B\sin\alpha = |\vec{\omega}\times\vec{B}|$$

(מנוסחת המכפלה הוקטורית) אבל יש גם שוויון בכיוון שכן אכן השינוי יוצא בכיוון $\vec{\omega}\times\vec{B}$, ולכן יש שוויון וקטורי ומכאן אכן:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{B}$$

בעזרת זה, נחשב את הנגזרת של וקטור במערכת מסתובבת.



עבור הצופה האינרציאלי, וקטורי היחידה $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ קבועים שכן המערכת נחה.
עבור הצופה שבתוך הקרוסלה לעיל, $\widehat{x'}, \widehat{y'}, \widehat{z'}$ אלו וקטורי יחידה אשר מבחינתו הם קבועים אך מבחוץ זזים.
לכן:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{x'}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \widehat{x'}$$
$$\frac{\mathrm{d}\widehat{y'}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \widehat{y'}$$
$$\frac{\mathrm{d}\widehat{z'}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \widehat{z'}$$

נסתכל על וקטור כלשהו:

$$\vec{C} = C_x\hat{x} + C_y\hat{y} + C_z\hat{z}$$

ונרצה להביעו כוקטור בתוך המערכת, דהיינו:

$$\vec{C} = C'_x\widehat{x'} + C'_y\widehat{y'} + C'_z\widehat{z'}$$

כעת מנגזרת מכפלה:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C'_x}{\mathrm{d}t}\widehat{x'} + C'_x\frac{\mathrm{d}\widehat{x'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}C'_y}{\mathrm{d}t}\widehat{y'} + C'_y\frac{\mathrm{d}\widehat{y'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}C'_z}{\mathrm{d}t}\widehat{z'} + C'_z\frac{\mathrm{d}\widehat{z'}}{\mathrm{d}t}$$

נאחד:

$$= \frac{\mathrm{d}C'_x}{\mathrm{d}t}\widehat{x'} + \frac{\mathrm{d}C'_y}{\mathrm{d}t}\widehat{y'} + \frac{\mathrm{d}C'_z}{\mathrm{d}t}\widehat{z'} + C'_x\vec{\omega} \times \widehat{x'} + C'_y\vec{\omega} \times \widehat{y'} + C'_z\vec{\omega} \times \widehat{z'}$$

אבל כל הביטויים הימניים:

$$C'_x\vec{\omega} \times \widehat{x'} + C'_y\vec{\omega} \times \widehat{y'} + C'_z\vec{\omega} \times \widehat{z'} = \vec{\omega} \times \vec{C}$$

והביטויים השמאליים:

$$\frac{\mathrm{d}C'_x}{\mathrm{d}t}\widehat{x'} + \frac{\mathrm{d}C'_y}{\mathrm{d}t}\widehat{y'} + \frac{\mathrm{d}C'_z}{\mathrm{d}t}\widehat{z'} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{ROT}}$$

דהיינו הנגזרת כמו שהיינו מצפים, כאילו x', y', z' היו קבועים.

ולכן נגזרת כמו שהיינו רוצים לראות במערכת האינרציאלית תהיה:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{IN}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\vec{C}$$

כעת נרצה לחשב את המהירויות. נבחר $\vec{C}=\vec{r}$ (וקטור המיקום):

$$\vec{V}_{\mathrm{IN}} = \vec{V}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

כלומר המהירות האינרציאלית היא המהירות של הוקטור בסיבוב עצמו בתוספת המהירות שמעניק הסיבוב. די אינטואיטיבי.
ומה תהיה התאוצה? נבחר $\vec{C}=\vec{v}$ (וקטור המהירות):

$$\vec{a}_{\mathrm{IN}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{IN}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\vec{V}$$

אבל אפשר להציב את שקיבלנו בסעיף הקודם:

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{V}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right)_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\left(\vec{V}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) =$$

$$\vec{a}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{ROT}}}_{=\vec{V}_{\mathrm{ROT}}} + \vec{\omega}\times\vec{V}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{a}_{\mathrm{ROT}} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

ובסה"כ:

$$\vec{a}_{\mathrm{IN}} = \vec{a}_{\mathrm{ROT}} + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{\mathrm{ROT}} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$
$$\vec{a}_{\mathrm{ROT}} = \vec{a}_{\mathrm{IN}} - 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{\mathrm{ROT}} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

כעת נמצא את הכוחות החסרים לנו. בעיני הצופה במערכת המסתובבת:

$$\sum\vec{F}_{\mathrm{ROT}} = m\vec{a}_{\mathrm{ROT}}$$

$$= m\vec{a}_{\mathrm{IN}} - 2m\vec{\omega}\times\vec{V}_{\mathrm{ROT}} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

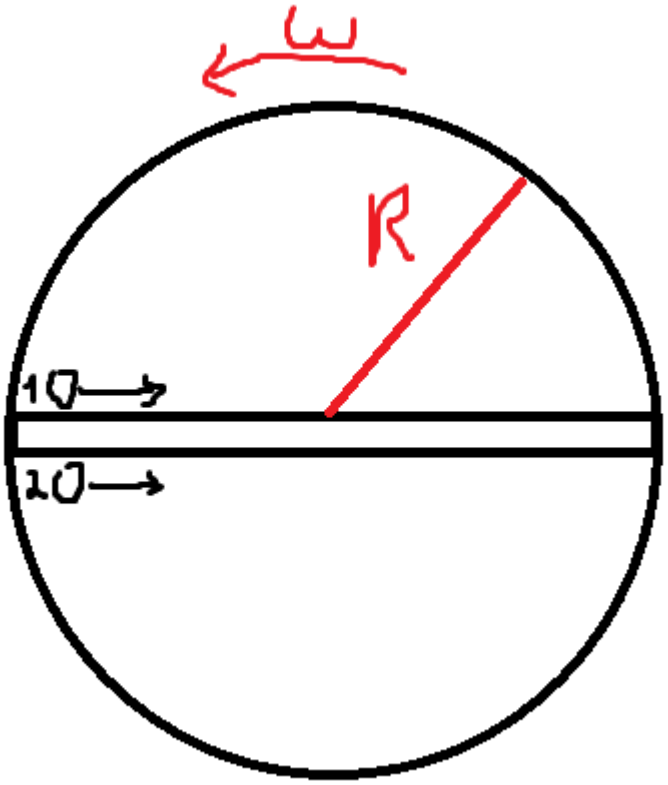
ולכן:

$$\sum\vec{F}_{\mathrm{ROT}} = \sum\vec{F}_{\mathrm{IN}}\underbrace{-2m\vec{\omega}\times\vec{V}_{\mathrm{ROT}}}_{-F_{\mathrm{COR}}}\underbrace{-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{-F_{\mathrm{CENT}}}$$

ואלו הכוחות שעלינו להוסיף.

דוגמה 9.7. משחררים שני כדורים בעלי מסה m בצמוד למחסום במהירות v_0 ביחס למערכת המסתובבת. אין חיכוך עם המחסום.

1. מי מהכדורים ישאר צמוד למחסום? הסבירו.
2. מצאו את מיקום הכדור לאורך המחסום של הכדור שנשאר צמוד למחסום.



פתרון. ננתח מבחינת המערכת המסתובבת.
המהירות של שני הגופים בהתחלה:

$$\vec{V}(t=0) = -v_0\hat{r}$$

וכמו"כ:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$$

(יוצא מהלוח). נחשב את הכוחות המדומים:

$$\vec{F}_{\text{CENT}} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -m\omega\hat{z}\times(\omega\hat{z}\times r\hat{r}) = -m\omega^2 r\hat{z}\times\hat{\theta} = m\omega^2 r\hat{r}$$

הכוח הצנטריפוגלי תמיד בכיוון החיובי של $\hat{r}$, וגורם לו לרצות "לבורח" החוצה מהמעגל.
נחשב את כוח קוריוליס:

$$\vec{F}_{\text{COR}} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{ROT}}$$
$$= -2m\omega\hat{z}\times(-v_0\hat{r}) = 2m\omega v_0\hat{\theta}$$

כלומר כוח קוריוליס גורם לנו לנוע בכיוון $\hat{\theta}$. לכן הגוף התחתון שלא חסום ינוע למטה ולא יישאר דבוק, בעוד שהאחר יידבק למחסום בעקבות קוריליוס.
כעת נרצה לחשב את המיקום של הגוף העליון. במערכת הלא אינרציאלית הגוף נע בקו ישר! איזו הקלה.
בתנועה החד מימדית רק הכוח הצנטריפוגלי פועל על הגוף, ולכן במערכת המסתובבת:

$$\sum F_r = ma_r$$

$$m\omega^2 r = ma_r$$

בקואורדינטות פולריות:

$$m\omega^2 r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

אבל הגוף נע בקו ישר ולכן $\dot{\theta} = 0$. לכן:

$$\omega^2 r = \ddot{r}$$
$$\iff r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

כעת אפשר למצוא את הקבועים מתנאי התחלה:

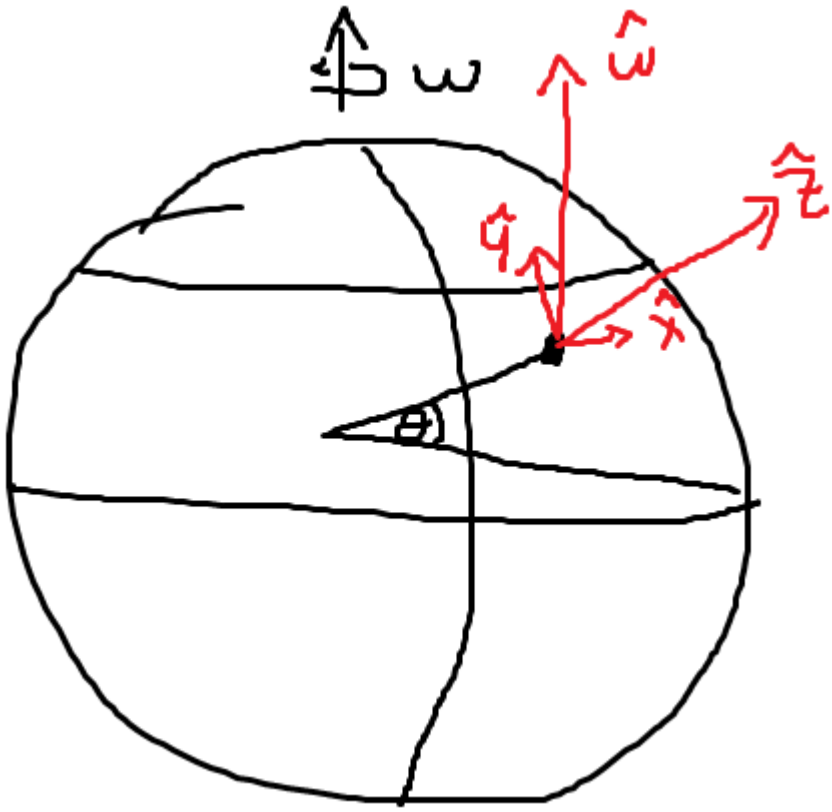
$$r(t=0)=R \iff A+B=R$$
$$\dot{r}(t=0)=-v_0 \iff \omega A-\omega B=-v_0$$

כדור הארץ הוא (כידוע) מערכת מסתובבת, שכן כדו"א מסתובב סביב צירו. זמן המחזור של התנועה הוא אורך היממה, 24 שעות. לכן המהירות הזוויתית:

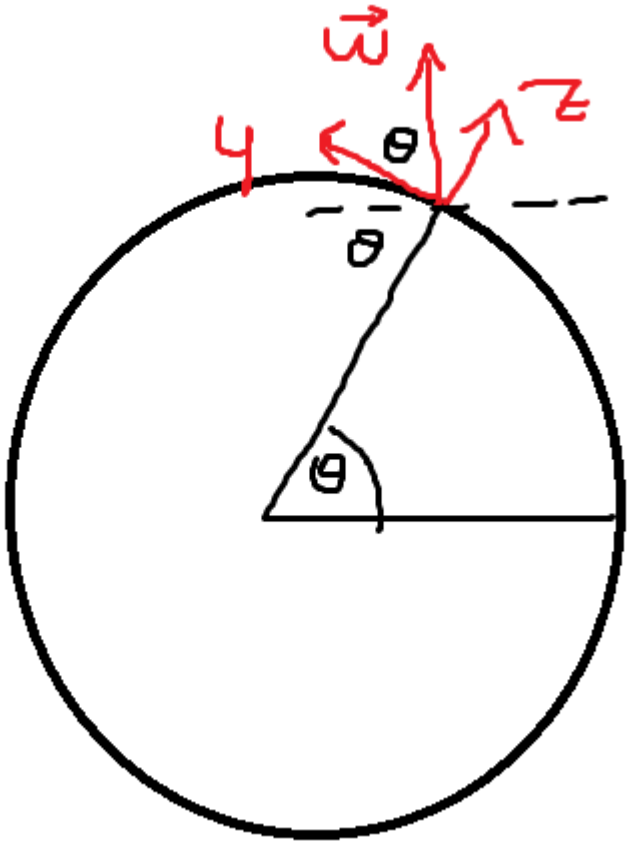
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}=7.27\cdot 10^{-5}\text{Hz}$$

זה גודל די קטן, ולכן לרוב זניח. אבל בשאלות שעלינו להתייחס לתנועת כדו"א איננו יכולים להתעלם מכך. עלינו להוסיף כוחות מדומים לניתוח שלנו בכדי לקבל תוצאה מדוייקת יותר. כדו"א מערכת לא אינרציאלית.

בכדי לנתח מה קורה בכדו"א, נשתמש במערכת צירים מקומית. אפשר לחלק את כדו"א לקווי אורך (מקבילים לקו המשוואה) וקווי רוח, שמאונכים לקו המשוואה. לכל נקודה יש זווית הנוצרת עם קו המשוואה, להלן:



ואם נרצה למצוא את הרכיבים של $\vec{\omega}$ ע"י $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$, נביט במבט מלמעלה:



ולכן:

$$\vec{\omega} = \omega\cos\theta\hat{y} + \omega\sin\theta\hat{z}$$

דוגמה 9.8. נהר זורם בקו רוחב θ צפון במהירות v_0. מהי גודלה של תאוצת קוריוליס ולכיוון איזו גדה של הנהר המים יתפסו ע"י תאוצה זו?
פתרו בשני מקרים: א. הנהר זורם צפונה ב. הנהר זורם מזרחה.

פתרון. תאוצת קוריוליס נתונה במקרה הצפוני ע"י:

$$\vec{a}_{\text{COR}} = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{ROT}} = -2(\omega\cos\theta\hat{y} + \omega\sin\theta\hat{z})\times v_0\hat{y} = 2\omega v_0\sin\theta\hat{x}$$

כלומר המים נדחפים לגדה הימנית (לכיוון $\hat{x}$)
במקרה המזרחי, התנועה v_0 תהיה בכיוון $\hat{x}$:

$$-2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{ROT}} = -2(\omega\cos\theta\hat{y} + \omega\sin\theta\hat{z})\times v_0\hat{x} = 2\omega v_0\cos\theta\hat{z} - 2\omega v_0\sin\theta\hat{y}$$

כלומר המים נדחפים לגדה הימנית. שימו לב שיש תאוצה גם בכיוון ציר $\hat{z}$! אבל התנועה שם נבלמת ע"י כוח המשיכה. באופן כללי קל לוודא שבכל הנהרות בחצי הצפוני של הכדור מרגישים דחיפה ימינה, וציקלונים בחצי הכדור ככלל נעים ימינה, בעוד שבחצי הדרומי שמאלה.

דוגמה 9.9. מקו רוחב θ צפון, מראש מגדל שגובהו H יורים פגז במהירות אופקית v_0 לכיוון דרום.
חשבו את הסטייה בנקודת הפגיעה של הפגז בקרקע כתוצאה מכוח קוריוליס.

פתרון. נחשב את הכיוון של כוח קוריוליס ב $t=0$:

$$\vec{F}_{\text{COR}} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{ROT}} = -2m(\omega\cos\theta\hat{y} + \omega\sin\theta\hat{z})\times(-v_0\hat{y}) = -2m\omega v_0\sin\theta\hat{x}$$

כלומר הגוף יסטה מערבה! החישוב המדוייק יהיה די מסובך, ולכן כדי למצוא את הסטייה, נמצא מתי הגוף יגיע לקרקע בלי קוריוליס, ואז נציב זאת במיקום של התנועה לפי קוריוליס (זו הזנחה די טובה אך לא נוכית)
בלי קוריוליס, למצוא מתי הפגז יגיע לקרקע נביט בתנועה בתאוצה קבועה:

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \iff t = \sqrt{\frac{2H}{t}}$$

ולכן המהירות:

$$\vec{v} = -v_0\hat{y} - gt\hat{z}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{COR}} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{ROT}} &= -2(\omega\cos\theta\hat{y} + \omega\sin\theta\hat{z}) \times (-v_0\hat{y} - gt\hat{z}) \\ &= 2\omega gt\cos\theta\hat{x} - 2\omega v_0\sin\theta\hat{x}\end{aligned}$$

כדי למצוא את המיקום נעשה פעמיים אינטגרל:

$$v_x = \int a_x \mathrm{d}t = \omega g t^2\cos\theta - 2\omega v_0\sin\theta t$$

$$x = \int v_x \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\omega g t^3 - \omega v_0\sin\theta t^2$$

ולכן הסטייה תהיה המיקום בסוף (בזמן שחישבנו) פחות אפס, כי 0 זה המיקום האידיאלי:

$$\Delta x = \frac{1}{3}\omega g\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^3 - \frac{2H\omega v_0\sin\theta}{g}$$

דוגמה 9.10. מסה מחוברת לקפיץ בתוך מגדל בקו הרוחב θ צפון. נתונים: m, R_E, g, k. מהי תדירות התנועות בהתחשב סיבוב כדו"א?

פתרון. נחשב את כוח קוריליוס:

$$\vec{F}_{\text{COR}} = -2m\vec{\omega} \times v_{\text{ROT}} = -2m(\omega\cos\theta\hat{y} + \omega\sin\theta\hat{z}) \times (\cdots)\hat{z} = (\cdots)\hat{x}$$

לא בכיוון התנועה, ולכן לא משפיע על התדירות. נחשב את הכוח הצנטריפוגלי:

$$\vec{F}_{\text{CENT}} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{r}) = \cdots = (\cdots)\hat{y} + m\omega^2(R_E + z)\cos^2\theta\hat{z}$$

ולכן משוואת הכוחות בציר z:

$$\sum F = m\ddot{z}$$

$$-k(z - \ell) - mg + m\omega^2(R_E + z)\cos^2\theta = m\ddot{z}$$

כלומר:

$$\text{Constant} - (k - m\omega^2\cos^2\theta)z = m\ddot{z}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2\cos^2\theta}$$

תם קורס מכניכיף ☺.

א' יחידות מידה

<u>הערה</u>: את נושא זה החלטתי לשים בסיכום על דעת עצמי, אע"פ שלא הוזכר מפורשות בהרצאה ובתרגול

בעולם לגדלים שונים יש משמעויות שונות. ברור כי 36 מעלות צלזיוס אינם 36 סוכריות, אף על פי שזו אותה הכמות. השוני נובע ממה מספר זה מייצג. יחידות מידה שונות מייצגות כמויות שונות.

הגדרה א'.1. יהי גודל פיזיקלי כלשהו. יחידת מידה u של הגודל הינה סולם/מדד של הגודל הפיזיקלי.

סיכום א'.2. אם a גודל פיזיקלי כלשהו עם יחידות מידה u, אז מסמנים $[a] = u$.

בעולם אנחנו משתמשים בהמון סוגים של יחידות מידה. בקורס זה, נעבוד בעיקר בשיטת m, k, s (second meter, kilogram,). במערכת יחידות זו, אורך נמדד במטרים, מסה נמדדת בקילוגרמים, וזמן נמדד בשניות. למעשה את כלל הגדלים הפיזיקלים במכניקה מגדירים בעזרת שלושת היחידות הללו.

א'.1 אריתמטיקה של יחידות מידה

בעולם האמיתי אנחנו משתמשים במספרים כדי לבצע עליהם חישובים. בסעיף זה נבחן כיצד היחידות משפיעות על העניין.

כמה זה שלושה תפוחים ועוד ארבעה תפוזים? מתחכמים יגידו כי זה 7 פירות, אך זה לא מדוייק שכן הרסנו את המידע לגבי התפוחים והתפוזים. למעשה הכללנו את יחידת המידה אך זו אינה יחידת המידה שאנו מעוניינים בה (לרוב).
המשמעות הקלאסית של חיבור גדלים זה לצרף אותם ביחד. לצרף שני גדלים עם יחידות מידה שונות לא הגיוני פיזיקלית, שכן אז לא ניתן להתייחס ליחידת המידה.
כמו כן, אם אכן מצרפים שני גדלים עם אותם יחידות, יחידות המידה לא יישתנו. הגודל החדש יהיה עם אותם יחידות אך גדול או קטן יותר.
אפשר לנסח את הפסקה לעיל כמסקנה:

מסקנה א'.3. יהיו a, b גדלים פיזיקליים. אזי:

$$[a+b] = u \iff [a] = [b] = u$$

ואם $[a] \neq [b]$ אזי $[a+b]$ אינו מוגדר.

מנגד, כפל של גדלים אפשר לעשות ללא הגבלה.

מסקנה א'.4. יהיו a, b גדלים פיזיקליים. אזי:

$$[ab] = [a][b]$$

הסיבה לכך (בעיני לפחות) היא משום שאת הכפל ניתן לבטא גאומטרית בעזרת מלבן שאורכו a ורוחבו b. לכן כל פרט במלבן יכול להיות חלק מן שורה (ועם יחידות $[a]$) או חלק מן עמודה (ועם יחידות $[b]$).
שימו לב כי בפרט עבור $[a] = [b]$ מתקיים כי:

$$[ab] = [a]^2 = [b]^2$$

הגדרה א'.5. גודל פיזיקלי ייקרא טהור או חסר יחידות אם הוא שווה בכל מערכת יחידות שנבחר. היחידות שלהם מסומנות ע"י $[a] = 1$.

דוגמה. הקבועים π, e ללא הקשר מיוחד, קבועי פרופורציה, זוויות (רדיאן גודל חסר יחידות) וכו'.

מסקנה א'.6. פונקציות אלמנטריות שאינן פולינומים קולטות מספרים ללא יחידות ופולטות מספר ללא יחידות.

א'.2 המרה בין יחידות

לעיתים